



التطور المعاصر لنظرية المنطق

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي

دار النهضة العربية

للتأليف والنشر

شعارها: صحتك - صحتنا

التطور المعاصر لنظرية المنطق

اهداءات ١٩٩٤
السيد/ ماهر محمد القادر
الاستاذية

التطور المعاصر لنظرية المنطق

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي
كلية الآداب
جامعة الإسكندرية وجامعة بيروت العربية

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
مكة - جدة - ص.ب. ٧٤٩



حقوق الطبع محفوظة

١٤٠٨ هـ - ١٩٨٨ م

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
بيروت - ص.ب. ٤٠٢٩٠



• الإدارة: بيروت، شارع مدحت باشا، بناية

كريدية، تلفون: ٣٠٣٨١٦ /

٣٠٩٨٣ / ٣١٢٢١٣

بريقاً: دانضة، ص.ب. ٧٤٩-١١

تلکس: NAHDA 40290 LE

29354 LE

• المكتبة: شارع البستاني، بناية اسكندراني

رقم ٣، غربي الجامعة العربية،

تلفون: ٣١٦٢٠٢

• المستودع: بئر حسن، تلفون: ٨٣٣١٨٠



أهداء

إلى عالم المنطق الأول ...
إلى من أحببته لذاته حبا خالصا
إلى الفيلسوف والمعلم
الأستاذ الدكتور محمد ثابت الغندى

تصدير

يشير الاستعراض الدقيق لمجهودات المناطق وعلماء الرياضيات حتى البدايات الاولى من القرن العشرين إلى الاهتمام المتزايد بقضايا المنطق الرياضي وأساسياته، وقد تبلور هذا الاتجاه في كتابات رسل المبكرة، ثم في المؤلف القيم الذي أخرجه «رسل - هوايتهد» فيما بين الأعوام ١٩١٠ - ٩١٣ والمسمى برنكييا ماتيماتيكاً، ذلك المؤلف الذي وضع القضايا موضعها الدقيق، واستطاع أن يسطر لنا قضايا المنطق والرياضيات برمتها في صورة رمزية دقيقة تخضع للبرهان الرياضي المحكم.

وكتاب البرنكييا أو مبادئ الرياضيات يعتمد أول ما يعتمد على فكرة النسق الاستنباطي، ولكن النسق الاستنباطي أو نظرية الاستنباط بأسرها تتخذ من فكرة التضمن ركيزة أساسية لها، إذ لا يمكن إحكام الاستنباط ونسقيته بدون الاستعانة بفكرة التضمن.

وفيما بعد برنكييا حاول المناطق وعلماء الرياضيات تطوير نسق المنطق الرياضي، فاتضح لهم أن من بين الأفكار التي لا بد وأن يتناولها أي نسق فكرة التضمن ذاتها، فأخذوا يعملون الفكر من أجل التوصل إلى أنساق بديلة لنسق برنكييا، وهنا انشقت الأبحاث المنطقية إلى اتجاهات مختلفة: نظر لويس المنطقي الأمريكي إلى تطوير الفكرة داخلياً فميز بين التضمن والتضمن الدقيق، وحاول تقنين رمزية خاصة بفكرته الأساسية، وتقدم لبناء النسق،

وظل يتابع التطورات المنطقية والرياضية سنوات طويلة ويعدل في النسق بصورة أو بأخرى؛ ومع ذلك ظل نسق برنكييا كما هو وفشل البديل. ومن جانب آخر حاول لوكاشيفتش من خلال المنطق متعدد القيم أن يعثر على نسق تتسحب عليه الشروط التي تحقق دقته، ومع هذا جاءت رمزيته وأفكاره مختلفة أشد الاختلاف عن نسق برنكييا. ثم أقدم هلبرت على المحاولة وأطلق صيحته الصورية المشهورة التي أراد من ورائها تأسيس نسق أكسيوماتيكي يعتمد على الصورية البحتة، ولكن لم تتحقق له فكرته المنشودة في إحلال النسق الأكسيوماتيكي مكان نسق برنكييا. وفي اتجاه آخر كانت أبحاث كواين وهو من رواد المذهب اللوجستي المعاصر تسير بخطوات واسعة نحو إجراء تصحيحات وتعديلات شاملة ابتداء من المفاهيم والتصورات الأساسية للمنطق الرياضي، فطرح جانباً فكرة النسق البديل، وأخذ يطور المفاهيم الأساسية للمنطق، وقن شروط التضمن وأسس العلاقة بين التضمن والشرط والشرط المزدوج، وميز بين الصحة والانساق المنطقي تمييزاً دقيقاً.

كل هذه الأفكار وتلك عرض لها القسم الأول في بحث مركز يكشف النقاب عن التطور النظري في جانب من أهم جوانب المنطق الرياضي وهو فكرة التضمن باعتبارها جوهر نظرية الاستنباط.

وكان من الطبيعي أن نتابع البحث والدرس في القسم الثاني في الانساق المتعددة المعروضة على الفكر المنطقي اليوم، فخصصنا الفصلين الخامس والسادس لتناول أهم أنساق المنطق البولندي المعاصرة، إذ تعرض لنسقين متتاليين هما، نسق (يان لوكاشيفتش) رائد ومؤسس المدرسة المنطقية البولندية، وفيه يقدم بعض الأفكار الجديدة التي يحاول بها أن يقيم النسق الاستنباطي لنظرية حساب القضايا على أسس جديدة من التمييز الدقيق بين بعض الأفكار التي سبق لنسق برنكييا أن تناولها. وأما النسق الثاني فهو الأحدث تطوراً والذي ظهر في عام ١٩٦٧ وقدمه «سلويسكي»

و «بوركوفسكي» في كتابهما عناصر المنطق الرياضي، عرضا فيه لنظرية حساب القضايا، ونظرية حساب المحمول، ونظرية المجاميع، ونظريات الحساب الرياضي الأخرى المختلفة. وقد اخترنا من بينها جميعاً نظرية حساب القضايا، على اعتبار أنها تكشف عن نسق آخر مباين لنسق لوكاشيفتش سواء في مقدمات النظرية، أم في جوانبها البرهانية التطبيقية.

ويمكن الزعم بأن نسق سلوسكي - بوركوفسكي، أبسط وأوضح الأنساق البولندية على الإطلاق، إذ يتعد عن خاصية التعقيد، ويتزع إلى البساطة والتحليل. وفي الوقت نفسه يمثل ما انتهى إليه الفكر المنطقي البولندي حتى الآن من ابتكارات نسقية. ومع هذا يظل التساؤل عن إمكانية ابتكار بدائل نسقية مخالفة لبرنكييا قائماً ومفتوحاً، إذ لم يغلّق باب الاجتهاد بعد، وعلى المناطق وعلماء الرياضيات أن يحملوا الفكر والقلم.

وبعد فقد حصل المؤلف بهذا البحث على جائزة جامعة الاسكندرية للتشجيع العلمي عام ١٩٨١ .

أرجو أن يحقق هذا البحث بعض الإسهام النظري ، عل الأقل ، في جانب إلقاء الضوء على الأنساق المتطورة .

والله أسأل العون

ماهر عبد القادر

الإسكندرية في

١٦ مارس (آذار) ١٩٨٥

القسم الأول
فكرة التضمن في الأنساق المنطقية المعاصرة

الفصل الأول

لويس والتضمن الدقيق

يشير الاستعراض المنطقي لأبحاث المنطق حتى صدور البرنكييا إلى أن المنطق التقليدي منطق ثنائي القيم، بمعنى أن القضية الواحدة قد يكون لها أحد قيمتين: إما أن تكون القضية صادقة Ture، أو أن تكون كاذبة Flase، وقد تم التعبير عن هذه الخاصية التي تكتسبها القضايا بصورة واضحة وصریحة في ذلك المبدأ المنطقي الهام الذي صاغه أرسطو قديماً بعنوان «مبدأ الثالث المرفوع» Principle of Excluded Middle (Tertium non datur).

إلا أن التطورات المنطقية والرياضية الحديثة، منذ القرن التاسع عشر، كشفت عن إمكانية التفكير بصورة أوسع وأشمل بعيداً عن المنطق الثنائي القيم. وعلى سبيل المثال نحن نجد أنه من الصعب في كثير من الأحيان في الرياضيات، وبعض فروع العلم الأخرى، أن يصرح بقيمتين للقضايا، إما لأنه لا يمكننا أن نبرهن على صدق القضايا أو كذبها، أو لأن نسبة أي من قيمتي الصدق أو الكذب للقضايا يفضي بنا إلى تناقضات Contradictions. ولقد أثبتت نظرية فيرما Fermat صحة هذا الرأي الأخير، حين ذهب هذا الرياضي الحاذق إلى أنه لا يمكننا أن نحل المعادلة $x^n + y^n = z^n$ ، في حالة ما إذا كانت $(2 < n)$. ورغم الجهود المضنية التي بذلها الرياضيون فلم يستطع أحدهم إثبات أن نظرية فيرما صادقة أو كاذبة. ومعنى هذا أن المعادلة تتجاوز نطاق مبدأ الثالث المرفوع، ولا تخضع له مباشرة.

لقد أجبر هذا الموقف الأخير المناطق على السعي وراء محاولة العثور على قيم *Values* أخرى بدلا من صادق أو كاذب لبعض القضايا، وبالتدرج اتجه المناطق إلى تصورات الجهة ^(١) *Modal Concepts* مثل: ممكن *Possible* - مستحيل *Impossible* - حادث *Contingent* - ضروري *Necessary*. ومثل هذه التصورات يمكن أن ننسبها للقضايا التي ليست هي صادقة أو كاذبة. من هنا نشأت فكرة المنطق الذي يسمح بثلاث قيم للقضايا، وهو ما نسميه المنطق ثلاثي القيم،... الخ. كما أن هناك مصطلحاً آخرأ يطلق على المنطق الذي يتبنى أكثر من قيمتين للصدق وهو مصطلح « منطق الجهة ، *Modal Logic* » أو قد يستخدم المصطلح « المنطق متعدد القيم ، *Many - valued Logic* ».

ومع أن منطق الجهات أو المنطق المتعدد القيم قد نشأ تحت تأثير المشكلات والصعوبات الرياضية والمنطقية (مثل مشكلة القضايا المخالفة ^(٢))

(١) تصور الجهة من التصورات المنطقية الهامة التي استخدمها أرسطو، وقد أشار الدكتور عبد الحميد صبره في مقدمته التحليلية الرائعة التي كتبها لتحليل « نظرية القياس الأرسطية » إلى هذه النقطة حيث يقول « يدل أرسطو على الجهات *modalities* بهذه الالفاظ التي نورد» مع ترجمتها الانجليزية:

necessary

impossible

possible

contingent

وهو يستخدم اللفظين الأخيرين على سبيل الترادف في كتاب العبارة. ولكن لما أحيانا في كتاب « التحليلات الاولى » معنيين مختلفين. لذلك وجب التمييز بينهما في الترجمة راجع: بان لوكاشيفتش: نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، منشأة المعارف، الاسكندرية، ١٩٦١، ص ٣٠.

(٢) يحتلط الأمر على بعض المربين أحيانا حين يترجمون المصطلح الإنجليزي *Paradox*، و جربنا وراء محاولة لتعريب المصطلح بصورة تنفي باغراض البحث المنطقي، ولكن تبين بعد عناء البحث أن أفضل ترجمة هي تلك التي قام بها الدكتور عبد الحميد صبره، والتي

Paradoxical Proposition أو القضايا الرياضية التي تقبل البرهان)؛ إلا أن
لهذين النوعين من المنطق أهمية في الأبحاث المعاصرة، وليس أدل على هذا من
تلك الأفكار القيمة التي دفع بها إلى المنطق الرياضي - منذ بداية القرن الحالي -
المنطقي الأمريكي لويس^(١) C. I. Lewis والتي أراد من خلالها تنشيط
الأبحاث المنطقية في اتجاهات جديدة تستمد قوتها من المنطق الرياضي في
صورته المعدلة كما وضعها «رسل» - هويتهد - في «برنكيبيا ماتيماتكا»، وفي

يحلل فيها ترجمته للمصطلح على النحو الآتي: «من الكلمات التي يصعب ترجمتها إلى العربية
كلمة «Paradox». والأسل في إطلاق هذه الكلمة أن تقال على الرأي doxa الخارج أو
الشاذ، ومعنى الخروج أو الشذوذ هو ما تدل عليه الأداة Para. فتطلق مثلا كلمة
Paradox على آراء زينون الأيلي في امتناع الكثرة والحركة خروج هذه الآراء على ما
يبدو أنه مقبول من الجميع. وقد يكون الخروج خروجاً من البديهية والعقل» وحينئذ يبدو
الرأي الخارج كأنه يحوي تناقضاً. لهذا ترجم بعضهم كلمة «Paradox» بـ «التناقضة». وقد
نصح هذه الترجمة في بعض الأحيان إلى حد ما. وقد يجوز أن تترجم كلمة
«Paradox» في بعض استعمالاتها الشائعة بلفظ «المفارقة» ولكن لتلك الكلمة في المنطق
الحديث معنى اصطلاحياً لا مفر من التمييز بينه وبين تناقض تمييزاً قاطعاً، وقد دللنا على
ذلك المعنى بكلمة «المخالفة». فالقضية والمخالفة «Paradoxical» هي قضية يلزم عند
افتراض صدقها أنها كاذبة. ويلزم عند افتراض كذبها أنها صادقة؛ في حين أن القضية
التناقضية هي قضية كاذبة وحسب. والمناقضة حين يتكلمون من «عالمات» رسل مثلاً،
إنما يقصدون قضايا من ذلك النوع الذي وصفناه».

راجع: بان لوكاشيلش؛ نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، ص ٢٢.

(١) من أهم كتابات لويس في المنطق الرياضي:

- survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.

- «Humanistic Systems of logic», Monat, 42, 1932.

- Lewis, C. I & C. H. Langford., Symbolic Logic, New York, 1932.

وبعد الكتاب الأول والكتاب الثالث الذي كتب بالاشتراك مع لانغفورد من أهم
إسهامات لويس في المنطق الرياضي على الإطلاق، وسوف نتمتع عليها معاً في تتبع أفكار
لويس بالإضافة إلى بعض الكتابات الأخرى مما سنذكره في حينه.

نفس الوقت نحاول حل بعض المعضلات الأساسية التي لا زالت تستحوذ على اهتمام المنطقة وعلماء الرياضيات منذ ظهرت المناقشات والقضايا المخالفة.

ولذا فإننا نفضل أن نتعرف على أفكار لويس المنطقية حتى نقف على مدى التطور الذي حدث في المنطق الرياضي في بعض أفكاره وقضاياه الأساسية، خاصة وأن هذه التطورات امتدت عبر نصف قرن من الزمان، ظل لويس يتابعها متابعة دقيقة منذ بداية القرن الحالي وحتى منتصفه أو ما يزيد، مما يثبت أصالته في البحث ودقته وبراعته وحيويته الفكرية.

لويس وفكرة التضمن

بدأ المنطقي الأمريكي لويس أبحاثه المنطقية من خلال نقد تصور التضمن كما عرفه برتراند رسل. فمن وجهة نظر لويس يأخذ رسل بفكرة التضمن المادي، وهذا ما لا يتفق مع أفكار لويس الأساسية، رغم أن لويس يستخدم قاعدة رسل القائلة: القضية الكاذبة تتضمن أي شيء، والقضية الصادقة متضمنة في أي شيء. مثال ذلك (القضية الكاذبة تتضمن أي شيء) والقمر مكون من الجبن الأبيض، تتضمن القضية $2 + 2 = 4$. في نسق رسل للتضمن المادي ينتج أنه يوجد فصل من القضايا لا يمكن تطبيقه على الاستدلال الصحيح وبصورة مماثلة يكون الفصل الفارغ محتوي في أي فصل.

يرى لويس أن النتائج الشاذة التي تنتج لدينا في هذه الحالات ترجع إلى أن علاقة التضمن عند رسل علاقة ما صدقية، لذلك فإن لويس يتجه إلى تحديد علاقة التضمن بصورة أدق بحيث تصبح هذه العلاقة وكأنها الأساس الدقيق لإنجازه المنطقي.

يعرف لويس التضمن الدقيق Strict Implication على النحو التالي: « من المستحيل أن p تكون صادقة، q كاذبة ». وعلى هذا الأساس يحاول تقديم

علاقة مفهومية بين p, q حيث يربطها بتصور « الضرورة » $necessity$ وهذا هو التضمن الدقيق. ويستخدم لويس بعض الرموز الخاصة لتمييز فكرة التضمن الدقيق عن فكرة رسل، وتنحصر رموزه في ثلاثة أنواع:

- ١ - الرمز \sim ويشير به للاستحالة Impossible
- ٢ - الرمز \neg ويشير به للسلب Negation
- ٣ - الرمز \supset ويشير به للتضمن الدقيق Strict Implication

وبناء على هذه الأفكار الثلاثة يضع لويس التعريف الآتي للتضمن الدقيق^(١):

$$df \quad p \supset q = \sim (p \cdot \sim q)$$

ويقراً هذا التعريف كما يلي:

« من المستحيل أن p تكون صادقة و q تكون كاذبة »

لكن إذا كان لويس قد أراد أن يضع ذلك التعريف الدقيق للتضمن

(١) نحن نلاحظ أن لويس بهذا التعريف قد أدخل الجهات $modalities$ إلى أنساق المنطق الرياضي؛ وقد كان « ماك كول، Mac Coll » أول من استفاد من تصور الجهة في مؤلفه « المنطق الرياضي وتطبيقاته » (Symbolic logic and its Applications) الذي صدر في عام ١٩٠٦، وقد اعتمد لويس على مؤلفات ماك كول في هذه الفكرة. كذلك كان ماك كول يضع في اعتباره توقع الصدق أو الكذب فيما يتعلق بموجهات الأحكام $modalities$ of Judgments: الضرورة، الحقيقة، الإمكانية. وطبقاً لرأي ماك كول فإن المحمولات الأساسية للأحكام هي: اليقين، المستحيل، صادق، كاذب، المتغير. ومعنى المتغير هو أنه ليس يقينياً ولا مستحيلاً. إن المتغير من الممكن أن يكون صادقاً ومن الممكن أن يكون كاذباً. وحتى نكون أكثر دقة، فإن العبارة « p ممكن لقضية q » أن تكون صادقة أو كاذبة، هذه العبارة تعني أن القضية غير يقينية. ومن الواضح - عكس نسق رسل - أن التطورات التي قدمها ماك كول ثم تبناها لويس فيما بعد لها ما يقابلها في اللغة العادية.

كبدل لتعريف رسل، فإنه يترتب على هذا أن يزودنا بنسق تختلف مقدماته عن ذلك النسق المؤلف عند رسل - هرايند، أو ما نعرفه بنسق البرنكييا . وقد فعل لويس^١ إذ نحن نجد يرتب أفكاره المنطقية في نسق دقيق بصورة توحى بأننا على وشك الالتقاء بالورث الشرعي للبرنكييا .

لويس ونسق المنطق الرياضي

يبدأ نسق المنطق الرياضي عند لويس بمجموعة من الأفكار الابتدائية، ثم مجموعة من التعريفات وهي ثلاث، تتلوها القضايا الابتدائية التي تعد بمثابة مسلمات النسق، والتي تأخذ أرقاماً على غرار الترقيم المعهود في البرنكييا، ثم ينتقل لويس من هذه وتلك إلى النظريات والبرهنة عليها مستخدماً ثلاث قواعد أساسية هي الاستبدال، والتقرير اللاحق، والاستدلال.

أولاً: الأفكار الابتدائية

- ١ - القضايا، ويرمز لها بالرموز p, q, r, \dots .
- ٢ - السلب مثل $\neg p$ وتعني « p كاذبة » أو « $\neg p$ ».
- ٣ - حاصل الضرب المنطقي Logical Product مثل $p \cdot q$ أو « p و q » وتعني أن كلا من p, q صادقان.
- ٤ - الامكانية Possibility أو الاتساق الذاتي Self-Consistency مثل « $\Diamond p$ » وتعني أن « p ممكنة » أو تقرأ « من الممكن أن تكون p صادقة ».
- ٥ - التكافؤ المنطقي logical Equivalence مثل $p = q$ وهي أيضاً علاقة التعريف^(١).

(١) ■ تبنى لويس في كتابه A survey of symbolic logic الفكرة الابتدائية « الاستحالة » والتي يشمر إليها بالرمز (\sim) بدلا من الإمكانية. وحتى لا تختلط الفكرة بالسلب فقد أشار ■

ثانياً: التعريفات Definitional

١ - تعريف الفصل Disjuction ($p \vee q$) ويعنى على الأقل واحدة من القضيتين p أو q تكون صادقة. ويعرف الفصل كما يلي:

$$11.01 \quad p \vee q = \sim (\sim p \sim q)$$

٢ - تعريف التضمن الدقيق بدلالة السلب والامكانية وحاصل الضرب المنطقي.

$$11.02 \quad p \supset q = \sim \diamond (p \sim q)$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي:

« ليس من الممكن أن تكون q صادقة، q كاذبة ».

٣ - علاقة التعريف « التكافؤ » ويعرفها على أنها تضمن دقيق مزدوج كما يلي:

$$11.03 \quad p = q = p \supset q. q \supset p$$

ثالثاً: القضايا الابتدائية

وهذه القضايا كما سبق أن ذكرنا تعد بمثابة مسلّمات النسق^(١)، وهي:

١ - لفكرة السلب بالرمز $(-)$ ، ولكنه أخيراً في كتابه Symbolic Logic الذي دونه بالاشتراك مع لا بيفورد حذف هذه الفكرة حتى يتجنب الاختلاط. ووضع لفكرة الإمكانية التي رمز لها بالرمز (\diamond) ، ومن ثم فإن تصور الاستحالة عنده يعرف عن طريق علاقته ما السلب العادي (\sim) Ordinary Negation والإمكانية (\diamond) بحيث أن الرمز (\sim) ككل يعني عدم الإمكانية.

(١) لقد بين ماكينزي J. C. C McKinsey في مقالة له بعنوان A Reduction in the

Number of Postulates for C. I. Lewis's System of Strict Implication ص ١٢٥

- ص ١٢٧ أن المسئلة الخامسة 5.11 يمكن أن تشتق من المسلّمات الخمس الأخرى.

$$11.1 \quad p q \rightarrow q p$$

$$11.2 \quad p q \rightarrow p$$

$$11.3 \quad p \rightarrow p p$$

$$11.4 \quad (p q) r \rightarrow (q r)$$

$$11.5 \quad p \rightarrow \sim (\sim p)$$

$$11.6 \quad (p \rightarrow q, q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$$

$$11.7 \quad (p q \rightarrow q) \rightarrow p$$

لكننا نلاحظ أن لويس في أول كتاباته « مسح للمنطق الرمزي »
 ١٩١٨ ، بدأ بالمسلات الآتية :

$$(1) \quad p q \rightarrow q p$$

$$(2) \quad q p \rightarrow p$$

$$(3) \quad p \rightarrow p p$$

$$(4) \quad p(q r) \rightarrow q (p r)$$

$$(5) \quad p \rightarrow \sim (\sim p)$$

$$(6) \quad (p \rightarrow q, q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$$

$$(7) \quad \diamond p \rightarrow p$$

$$(8) \quad p \rightarrow q = \sim \diamond q \rightarrow \sim \diamond p$$

لكننا حتى في هذه الحالة يمكن أن نصل إلى النتيجة .

$$\sim \diamond p = \sim p$$

أي أن « الاستحالة متطابقة مع الكذب » ومن ثم ينتهي التمييز الذي
 حاول لويس إقامته بين التضمن الدقيق والتضمن المادي ، وبالتالي يصبح من
 الممكن رد نسقه إلى ذلك النسق المعروض في البرنكيبييا ، وهذا بطبيعة الحال

يقودنا إلى ضرورة مراجعة نسق لويس ومحاولة استبدال المسلمة رقم « ٨ »
بالمسلمة الآتية :

(8') . $p \rightarrow q \rightarrow r \sim o q \rightarrow \sim o p$

وربما تنبه لويس إلى مثل هذه الفكرة، حين كتب المنطق الرمزي في عام ١٩٣٢ بالتعاون مع لانجفورد Langford حيث حاول أن يضع نسق المنطق في صورة أكثر صورية بحيث يمكن البرهنة فيه على عدد قليل من النظريات، ولذلك فقد أطلق على هذا النسق المصطلح S1، أي النسق 1 الذي يستند إلى المسلمات من 11.1 إلى 11.6، وبالتالي تم تعديل النسق المعروض في مؤلفه « مسح للمنطق الرمزي » مرة أخرى على أساس المسلمات ١ - ٧، بالإضافة إلى المسلمة (8') وأطلق على النسق في هذه الحالة S3.

رابعاً: النظريات

يمكن اشتقاق نظريات النسق عن طريق تطبيق عمليات الاستبدال أو التقرير اللاحق أو الاستدلال حيث :

١ - الاستبدال Substitution

أ - أي قضايا مرتبطة بعلاقة التكافؤ (\approx) يمكن أن نضع الواحدة منها مكان الأخرى.

ب - في أي قضية فإن أي متغير p, q, r, \dots يمكن أن نضع بدلا منه قضية أخرى « أو متغير قضائي ».

والطريقة التي يمكن بواسطتها أن تصدد الرموز الابتدائية « الأفكار الابتدائية » لتكون قضايا يمكن تعريفها كما يلي :

- p, q, r, \dots قضايا .

- إذا كانت p قضية، إذن $p, p \circ p$ هي قضايا.
- إذا كانت p, q قضايا إذن $(p \cdot q), (p = q)$ هي قضايا أيضاً.

٢ - التقرير اللاحق Adjunction

إذا أمكن تقرير القضيتين p, q منفصلتين إذن فمن الممكن تقرير حاصل ضربهما أي $(p \cdot q)$.

٣ - الاستدلال Inference

إذا أمكن تقرير $p, q \rightarrow$ إذن فمن الممكن أيضاً تقرير q .

والإجراء الذي يمكن عن طريق تطبيقه تصبح هذه العملية معدة للبرهنة على أن النظرية ذاتية، مشابه لذلك الإجراء الذي اتبعه رسل وهو يتهد في البرنكييا، وهنا يمكن التوصل لسلسلة من النظريات.

التضمن الدقيق والتضمن المادي.

كما نعلم فإن رسل يعرف التضمن المادي والتكافؤ المادي كما يلي:

$$\begin{aligned} p \supset q &= (p \cdot \sim q) \\ 1.01 \quad p = q &= (p \supset q) \cdot (q \supset p) \end{aligned}$$

فاذا وضعنا في الاعتبار التعريف الذي يقدمه لوليس للتضمن الدقيق، فإنه يمكن وضع التعريف الآتي:

$$12.81 \quad p \supset q \supset \sim (p \sim q)$$

وعلى أساس قاعدة الاستبدال (١) فإننا نحصل على.

$$4.1 \quad p \supset q \supset \sim (p \supset q)$$

أي « إذا كانت p تتضمن q فـ p تتضمن q تضمنا ماديا أيضاً ، والعكس غير صحيح .

ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن التضمن المادي أوسع وأشمل من التضمن الدقيق ، ويترتب على هذا أنه إذا كانت $q \supset p$ مبرهنة ، فإن $p \supset q$ مبرهنة أيضاً كحقيقة واضحة . وبهذه الصورة فإن كل المسلمات والتعريفات في نسق البرنكييا يمكن للبرهنة عليها في نسق التضمن الدقيق . إلا أننا نجد أن نسق برنكييا في عملياته البرهانية يستخدم الاستبدال والاستدلال المرتبط بالتضمن المادي للبرهنة على كل النظريات المعروضة داخل النسق ؛ لكن نسق لويس يستخدم الاستبدال كعملية أساسية للبرهان ، ولا يشير إلى استخدام الاستدلال داخل النسق ، ومع هذا فإن النسق يفتح الباب لامكانية استخدام الاستدلال ، حيث :

$$T4.29 \quad p, p \supset q \supset q$$

ذلك لأن $p, p \supset q$ هي نظرية ، كما أن $p \supset q$ نظريات أيضاً عن طريق التقرير اللاحق . ومن ثم فإنه بتطبيق 14.29 يمكن استنتاج أن القضية q هي نظرية أيضاً ، ويترتب على هذا أن أي شيء يمكن أن يستنبط بالطرق المألوفة في برنكييا ماتهاتيكا فإنه يمكن أن يستنبط ايضاً في نسق لويس .

علاقة الاتساق The Consistency Relation

وقد يلاحظ أيضاً أن تصورات الاتساق واستقلال قضيتين لا يمكن إيضاحها تماماً في حدود وتصورات التضمن المادي . وفي اللغة العادية يقال لقضيتين إنها متسقتان مع بعضها حيناً تأخذ أيها كمقدمة كذب الأخرى ، وبلغة المنطق الرياضي فإن .

$$(p \sim q)$$

أو

$$\sim (q \supset \sim p)$$

ويقال لقضيتين إنها مستقلتين إذا لم يمكن اشتقاق كلاهما من الأخرى كمقدمة.

$$\sim (p \supset q)$$

و

$$\sim (q \supset p)$$

ونحن نعلم أن مسلّمات أي نظرية رياضية أو منطقية يجب أن تكون مستقلة ومتسقة، ولكننا إذا قبلنا تصور قابلية الاستنباط الذي تعبر عنه علاقة التضمن المادي، فإنه سيصبح من الواضح أنه لن توجد قضيتان متسقتان ومستقلتان مثال ذلك.

$$15.3 \quad \sim (p \supset q) \rightarrow p \supset \sim q$$

هذه النظرية تقول: إذا لم يكن من الممكن اشتقاق 'q' من 'p' إذن 'q'، 'p' غير مستقلتين.

كذلك فإن

$$15.32 \quad \sim (p \supset \sim q) \rightarrow p \supset q$$

تعني: إذا كانت 'p'، 'q' غير متسقتين إذن يمكن اشتقاق 'q' من 'p'، و يترتب على هذا المعنى نتيجة هامة هي أن 'p'، 'q' ليستا مستقلتين. وبلغت التضمن الدقيق التي يستخدمها لويس فإن هذه المواضع المخالفة تختفي إذا

أخذنا في اعتبارنا الماهلات التي تعبر عنها النظريات الآتية، والتي لا يمكن البرهنة عليها ومن ثم فهي كاذبة:

$$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim \neg \neg \sim q$$

$$\neg (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow q$$

$$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow p$$

على هذا النحو يبدو لنا أن تصور الاتساق يأخذ معناه الذي يقترب من المعنى الدارج للكلمة إذا نظرنا لعلاقة التضمن كعلاقة اشتقاق. لقد رمز لويس لعلاقة الاتساق بالرمز O ، وهو يعرف هذه العلاقة كما يلي:

$$17.01 \quad poq = \sim (p \rightarrow \sim q)$$

وهذا التعريف يعني أن p ، q متسقان. وهذه الصيغة تفضي بنا إلى مجموعة أخرى من الصيغ في منطق لويس.

ولكن السؤال الهام الآن: كيف يعالج لويس دوال الموجهات؟ وهل يمكن أن نتبين الأبعاد الجديدة في منطق لويس فم يتعلق بالموجهات؟

دوال الموجهات وكيفية اختزالها في منطق لويس

رغم أنه من الممكن البرهنة على التكافؤ الآتي:

$$18.1 \quad \diamond p = pop = \sim (p \rightarrow \sim p)$$

إلا أن لويس لاحظ أنه يمكن استخدام هذا التعريف في تعريف تصور الإمكانية إذا أخذنا في الاعتبار تصور الاتساق أو التضمن الدقيق كمفهوم ابتدائي، حيث:

من 18.1 $\diamond p$ ، $\diamond p$ ممكنة، تعني أن p متفقة مع ذاتها، أو أن p تتضمن نفيها الذاتي.

والتعبير $(\diamond p) =$ الذي نكتبه كما يلي $p \diamond \sim$ يعني « من الكذب أن p ممكنة ، أو p مستحيلة ، أو p ليست متفقة مع ذاتها ، أو p تتضمن نفيها الذاتي :

$$18.12 \quad \sim \diamond p = \sim (p \diamond p) = p \supset \sim p$$

التعبير $(\sim p) \diamond$ أو $p \sim \diamond$ يعني « من الممكن أن p تكون كاذبة ، أو p ليست صادقة بالضرورة » ، أو إذا أخذنا في اعتبارنا التكافؤات :

$$18.13 \quad \diamond \sim p = \sim p \diamond \sim p = \sim (\sim p \supset p)$$

هذه التعبيرات تعني أن « نفي p ليس متسقاً ، أو أن « صدق p لا يمكن أن يستنبط من نفيها الذاتي » .

والتعبير $[\diamond (\sim p)]$ أو $\sim p \diamond \sim$ الذي يضعه لويس يعني : « من المستحيل أن تكون p كاذبة » . وبالتالي فإن « تكون صادقة بالضرورة » أو بالصورة الرمزية الآتية :

$$18.14 \quad \sim \diamond \sim p = \sim (\sim p \diamond \sim p) = \sim p \supset p$$

أي « نفي p ليس متسقاً » أو « يمكن اشتقاق صدق p من نفيها الذاتي » وعلى هذا فإنه يمكن مقارنة التكافؤات الآتية :

$$8.1 \quad p = p \sim (\sim p) = \sim (p \supset \sim p)$$

$$8.12 \quad \sim p = \sim [p \sim (\sim p)] = p \supset \sim p$$

$$8.13 \quad \sim p = \sim p \sim p = \sim (\sim p \supset p)$$

$$8.14 \quad p = \sim (\sim p \sim p) = \sim p \supset p$$

فإذا وضعنا العلاقات الدقيقة ٥ ، ٣ بدلا من العلاقات المادية الحاصل

الضرب المنطقي والتضمن المادي في التكافؤات السابقة، فإن التمييزات بين: يمكن، صادق، ضروري، وبين مستحيل الكذب، ممكن الكذب، يمكن الاستبعادها، ويصبح المنطق بذلك منطقاً ثنائي القيم. وحتى يوضح لويس التصورات: يمكن، مستحيل، ضروري، فإنه يدخل التمييز بين المعنى النسبي Relative والمعنى absolute لهذه الجهات. والمعنى النسبي - كما يستخدمه لويس - يشير إلى العلاقة بين القضية الملائمة وبين حالة الوقائع المعينة مثل، المعطيات الأولية، معرفتنا عن الواقعة الملائمة للحظة معينة، وهكذا. ومن هذا المنطلق فإن المصطلح «ممكن» عند لويس يعني الاتساق مع حالة الأشياء الملائمة. أما المصطلح «مستحيل» فيعني اللاتساق مع حالة الوقائع. والمصطلح «ضروري» يعني ما تتضمنه حالة الأشياء القائمة. ومن جهة أخرى فإن المعنى المطلق يشير إلى القضية، وعلاقتها الذاتية وعلاقتها بنفها. ومثل هذه العلاقة تنتج من التحليل المنطقي للقضية الملائمة. ومن ثم فالمعنى الملائم للإمكانية يصبح أوسع من المعنى المطلق بل ويتضمنه.

يعالج لويس الجهات في معناها المطلق ويؤسس علاقات الجهة الآتية:

18.4	$p \rightarrow \Diamond p$	الصدق يتضمن الإمكانية
18.14	$\sim \Diamond p \rightarrow \sim p$	الاستحالة تتضمن الكذب
18.42	$\sim \Diamond \sim p \rightarrow p$	الضرورة تتضمن الكذب
18.5	$p \rightarrow q, \sim \Diamond \sim q \rightarrow \Diamond p$	

« إذا لم يكن التالي ممكناً، إذن فالمقدم مستحيل أيضاً ».

$$18.52 \quad p \rightarrow q, \Diamond \sim q \rightarrow \Diamond \sim p$$

« إذا كان التالي ممكن الكذب، إذن فالمقدم ممكن الكذب أيضاً ».

تطوير نسق الموجهات عند لويس وحجة بيكر

اعتبرت أفكار لويس فيما يتعلق بنسق قضايا الموجهات من الإسهامات الجيدة والدقيقة في المنطق الرياضي المعاصر. ولكن بيكر Becker أسس حجة عن نسق لويس للموجهات، يبدأ فيها بالإشارة إلى أن لويس كان معنيا بالحديث عن ست جهات فحسب هي: صادق - كاذب - ممكن - مستحيل - ممكن الكذب - ضروري. مع الوضع في الاعتبار الجهات التأليفية مثل $\diamond \sim \sim \sim$ التي ذكرها لويس في منطقة عام ١٩٣٢ والتي تعني أنه «من الضرورة أنه مستحيل». لقد برهن ماكينزي Mackinsey في مقالة له بعنوان «برهان على أنه توجد موجهات متعددة في نسق لويس S_2 » على أنه في النسق S_2 وفي النسق S_1 أيضاً يوجد عدد لانهائي من هذه الموجهات المركبة غير القابلة للرد. ولقد أوضح ماكينزي أيضاً كل الجهات من النوع $\diamond \dots \diamond$ أو \diamond غير قابلة للرد ومن ثم فإن الجهات عن طريق التأليفات تفضي إلى موجهات جديدة غير قابلة للرد، وهذا يعني أن نسق لويس نسقاً مفتوحاً.

يرى بيكر أنه إذا اضيفت المسلمة ٨ إلى المسلمات 1-11.7 في نسق لويس فإنه ينتج.

$$1) \quad p \rightarrow q \rightarrow \diamond p \rightarrow \diamond$$

لكن بيكر يحاول تطوير رمزية لويس إلى رمزية أفضل بحيث يقتضي على بعض الصعوبات التي يمكن أن تعترض البرهنة على القضايا. ولذا فإنه يستخدم الرمز \square ليعني به «أنه من الضروري».

$$\square p = \sim \diamond \sim p$$

القضية « p ضرورية» تعني «من الكاذب أنه ممكن أن تكون p كاذبة»، «من المستحيل أن تكون p كاذبة».

ويبدأ بيكر في وضع بديهيات النسق بصورة جديدة حيث .

$$\Box p \rightarrow \Box \Box p$$

أي «الضرورة تتضمن ضرورة الضرورة» . وهذه البديهية تسمح باختزال الجهات كما يلي :

$$\Box^n p \Box p$$

$$\Diamond^n p = \Diamond p$$

وينتج عن ذلك أن

$$p \rightarrow p \rightarrow \Box p \rightarrow \Box q$$

$$\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$$

$$\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^n p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^n p = \Diamond \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^n \sim p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^n p = \Diamond \Box p$$

وباستخدام المبرهنات السابقة فإن كل الموجهات المركبة يمكن اختزالها في ١٤ موجهة أساسية . فعل سبيل المثال عندما تتكون الموجهة من خط النفي البسيط \sim ، فإنه إذا طبقنا قاعدة النفي المزدوج على اعتبار أنها ضرورية فإن القضية p تنتج (إذا كان عدد علامة النفي = صحيح) .

$$(\sim)^{2n} p = p$$

أو أن نفي $p = (\text{إذا كان عدد علامة النفي شاذًا})$

$$(\sim)^{2n+1} p = (\sim)^{2n} p = \sim p$$

وهكذا فإن الموجهات غير التامة تختزل إلى موجهتين أساسيتين: الصدق $'p'$ ، الكذب $'\sim p'$. وتكون الموجهات تامة Proper عندما يظهر الرمز \square أو الرمز \diamond فعلا. وعلى أساس النظريات المؤسسة نحصل على الموجهات المثبتة غير القابلة للاختزال كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} \square \diamond \square & , & \square \diamond \quad , \quad \square \\ \diamond \square \diamond & , & \diamond \square \quad , \quad \diamond \end{array}$$

ومن السهولة بمكان أن نلاحظ أن الموجهة السلبية تناظر موجهة مثبتة، إذا أضيفت علامة النفي في النهاية. ومن ثم يوجد لدينا $3 + 3$ مثبتة، $3 + 3$ منفية، ٢ موجهة غير تامة، ويصبح العدد الاجمالي لهذه الموجهات ١٤ موجهة أساسية غير قابلة للرد أو الاختزال، وبالتالي يوجد عدد من التضمنات الدقيقة بين التضمنات الست المثبتة، خاصة:

$$\begin{array}{l} \square p \rightarrow \square \diamond \square p \rightarrow \diamond \square p \rightarrow \diamond \square \diamond p \\ \diamond \square p \\ \square p \rightarrow \square \diamond \square p \rightarrow \square \diamond p \rightarrow \diamond \square \diamond p \\ \square \diamond p \end{array}$$

ويمكن استخدام السهم \rightarrow بدلا من العلامة \rightarrow وبالتالي يمكن كتابتها
العلامات السابقة على هذا النحو:

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow & \diamond \square p & \leftarrow \\ \square p \rightarrow \square \diamond \square p & || & | \diamond \square \diamond p \rightarrow \diamond p \\ \rightarrow & \square \diamond p & \leftarrow \end{array}$$

تلك هي التضمنات الأساسية، وقد برهن W.T. Parry على أنه لا توجد تضمنات أخرى. لكننا إذا ما مضينا في دراسة الموجهات في نسق لويس، فسوف يتضح لنا أن بيكر Oskar Becker يضيف مسلمة أخرى للنسق، هي:

$$\diamond p \rightarrow \Box \diamond p$$

وينتقل من هذا إلى تعريف النسق S الذي تقبل فيه الموجهات الرد إلى ٦ موجهات فقط هي:

أ - موجهتين غير تامتين [p صادقة، p ~ كاذبة].


ب - أربع موجهات تامة، اثنتان منها مثبتتان (صادق بالضرورة $\Box p$) ، ممكنة الصدق ($\diamond p$) واثنتان سالبتان (كاذب بالضرورة أو مستحيل $\Box \sim p$)، ممكن الكذب ($\sim \Box p$).

الفصل الثاني

لوكاشيفتش والمنطق متعدد القيم

أسهم المنطقي البولندي «يان لوكاشيفتش»^(١) Jan Lukasiewicz في إثراء الدراسات المنطقية المعاصرة، فصصح وعدل، وحذف وأضاف، وطور

(١) لخص الدكتور تشلاف ليفسكي Czesław Lejewski حياة يان لوكاشيفتش والآراء المنطقية الهامة التي قدمها ومدرسته في المقدمة التي كتبها للطبعة العربية التي جاءت ترجمة لكتاب نظرية القياس الأرسطية، والتي قام بها الدكتور عبد الحميد صبره. حيث يقول: «ولد يان لوكاشيفتش في لفوف سنة ١٨٧٨. ودروس في الجمنازيوم الفيلولوجي هناك، حيث تلقى معرفة متينة باللاتينية واليونانية. فكان باستقامته حتى بلوغه السبعين أن يلقى من ظهر قلب أشعاراً من هوراس وفقرات من هومروس. وفي سنة ١٨٩٧ انتظم في جامعة لفوف لدراسة الرياضيات والفلسفة، وبعد أن أم برنامجاً دراسياً تحت إشراف الأستاذ تفاردوفسكي Twardowski حصل على شهادة الدكتوراه في الفلسفة سنة ١٩٠٢. وعاد إلى لفوف سنة ١٩٠٦ حيث عين محاضراً في الفلسفة وبما يجدر ملاحظته أن سلسلة محاضراته الأولى كان موضوعها «جبر المنطق» وظل يقوم بالتدريس في جامعة لفوف حتى بداية الحرب العالمية الأولى، وفي سنة ١٩١٥ انتقل إلى وارسو ليحاضر في الفلسفة في جامعتها ثم ترك الجامعة عام ١٩١٨ ليشغل وظيفة عالية في وزارة التربية البولندية، وفي سنة ١٩١٩ كان وزير التربية في حكومة باديرفسكي، وفي نهاية ذلك العام استأنف حياته الأكاديمية فكان حتى سبتمبر ١٩٣٩ أستاذاً للفلسفة في جامعة وارسو - وفي خلال هذه المدة دعي لشغل وظيفة مدير للجامعة مرتين الأولى ١٩٢٢ - ١٩٢٣، والثانية عام ١٩٣١ - ١٩٣٢».

وفي الأيام الأولى من الحرب العالمية الثانية دمرت  لوكاشيفتش في غارة جوية. - وأتى الحريق الذي نشب في أثر ذلك حل مكتبته كلها - وفيها مؤلفاته المخطوطة ومذكراته...

المفاهيم والمصطلحات، وأخذ بيد الدراسات المعاصرة في المنطق الرياضي وزودها بدفعات قوية حفزت المناطق من بعده، أو على الأقل جيل تلامذته من المدرسة البولندية، إلى تطوير أبحاث المنطق بما يتلائم مع طبيعة الدراسة في هذا العلم.

ومن أهم الابحاث التي أثراها لوكاشيفيتش « تلك الخاصة بتصوير الجهة في

كان لوكاشيفيتش أقدم تلامذة كانسيميرس تفارودوفسكي (١٨٦٦ - ١٩٣٨) الذي تلقى دراسته الفلسفية على فرانز برنتانو *Franz Brentano* في فيينا... وكان اهتمام تفارودوفسكي في الفلسفة منصباً على تحليل المعاني. فكان يرن تلامذته على التفكير الواضح، ولكنه لم يدعمهم يسون أن تحليل المعاني ليس غاية في ذاته وإنما هو مدخل إلى الفلسفة. ونحن نجد أيضاً صفي *المنطق* والاحكام اللتين تستلزمها هذه الطريقة في أول بحوث لوكاشيفيتش الهامة وهو البحث الرسوم « في مبدأ التناقض عند أرسطو، نشر هذا البحث بالبولندية سنة ١٩١٠... وفي هذا الكتاب يبين لوكاشيفيتش أن عند أرسطو ثلاث صيغ *منطقية* لمبدأ التناقض، الصيغة الأولى أنطولوجية أو وجودية. والثانية منطقية والثالثة سيكولوجية... ويتأدى لوكاشيفيتش من النظر في الصيغة الأنطولوجية للمبدأ إلى مناقشة مسألة المخالفات التي كان اكتشافها بمثابة صدفة للمشتغلين بالفلسفة والرياضيات في ذلك الوقت...

ولا شك في أن لوكاشيفيتش قد استوحى تصورهِ للمنطق الثلاثي القيم من معالجة أرسطو للحوادث الممكنة المستقبلية في كتاب «العبارة»، وأما الاعتبارات الصورية كتركيب التي أدت بالمنطقي *أ.ل. بوست E.L. Post* بعد ذلك بأربع سنوات إلى نتائج مشابهة، فلم يكن لها إلا دور ثانوي في تفكير لوكاشيفيتش. وكان لوكاشيفيتش يرمي من إنشاء نسق منطقي ثلاثي القيم إلى صياغة نظرية تحوي القوانين التقليدية في المنطق الموجه، وقد حاول أيضاً بإنشاء ذلك النسق أن يتغلب على مذهب الحتمية الفلسفي، وهو مذهب كان يعتقد أنه لازم عند التسليم بمبدأ ثنائية القيم ولكنه عدل فيما بعد عن اعتقاده ذلك « فلم يعد يرى ثماناً بين انقضاء الحتمية والمنطق الثنائي القيم. وبعد إنشاء النسق المنطقي الثلاثي القيم صار من الواضح أنه يمكن إنشاء نسق رياضي القيم أو خاصي القيم أو نسق عدد القيم فيه أي عدد تشاء، بل نسق يحوي ما لا نهاية له من القيم.

راجع نظرية القياس الارسطية «ترجمة عبدالحميد صبره» *المقدمة* من ص ٤٠ - ص

المنطق. فقد تابعها عن كتب وحاول ما وسعه الجهد أن يقدم الحساب المنطقي المتكامل لما نسميه الآن « المنطق متعدد القيم » « many - valued logic » وفي تحليل لوكاشيفيتش للموجّهات نلتقي بالأفكار الابتدائية الآتية: ^(١)

- ١ - p قضية ويرمز لها بالرمز p
- ٢ - p قضية كاذبة ويرمز لها بالرمز Np أي $(non - p)$
- ٣ - p قضية ممكنة ويرمز لها بالرمز Mp (ويلاحظ أن الحرف M في رمزية لوكاشيفيتش مأخوذ من الكلمة الألمانية *Möglich* التي تعني *(possible)* .

- ٤ - p ليست ممكنة ويرمز لها بالرمز NMp
- ٥ - $(non - p)$ « ممكنة » ويرمز لها بالرمز MNp
- ٦ - $(non - p)$ « ليست ممكنة » ويرمز لها بالرمز $NMNp$

كذلك فإن لوكاشيفيتش يحاول أن يحدد التضمن بدقة، ويستخدم الرمز C الذي يشير إلى التضمن ليميز فكرته عن فكرة رسل وفكرة لويس أيضاً. فالبارة « $Imples\ q$ » التي نلتقي بها في منطق رسل تكتب في رمزية لوكاشيفيتش بالصورة:

$$C\ p\ q$$

وتعني إذا كانت p صادقة إذن q صادقة أيضاً

$$C\ p\ q: \text{ "If } p \text{ then } q\text{ "}$$

(١) أثرت أن أقدم الرمزية التي يستخدمها لوكاشيفيتش في منطقته كما هي لأن تعريبها كما هو معروض في ترجمة عبد الحميد صبره يؤدي بالقارىء إلى وقوع في خطأ تكرار بعض الحروف المستخدمة.

ويطلق لوكاشيفتش على الرموز M.N.C في رمزيته مصطلح روابط

«Functores» .

والواقع أن لوكاشيفتش استطاع أن يستمد أفكاره الجديدة من بعض القضايا الهامة التي عثر عليها في المنطق الكلاسيكي وهي :

القضية الأولى تكون النتيجة صحيحة حينما ننقل من الوجود الضروري إلى الوجود .

القضية الثانية تكون النتيجة صحيحة حينما ننقل من الوجود إلى الوجود الممكن .

القضية الثالثة من المستحيل إلى اللاوجود فإن النتيجة صحيحة (إذا كانت p ليست ممكنة إذن $non - p$) .

القضية الرابعة إذا وجد شيء ما فإن وجوده يكون ضرورياً (وهذه القضية وجدها كوكاشيفتش عند لينتزر الذي أكتشف أنه أخذها عن أرسطو من كتابه De Interpretatione .

القضية الخامسة إذا افترضت $non - p$ إذن p ليست ممكنة .

القضية السادسة بالنسبة لأي قضية p فإنه إما p أو $non - p$ ممكنة .

لقد أشار لوكاشيفتش إلى القضيتين الموجهتين الأولتين بالصورة الرمزية الآتية

1. C N Mp Np «NMP implies Np

2. C N p N M p «N p implies N Mp

وحق يمكن اشتقاق قضايا أخرى من الصياغات فإن لوكاشيفتش يستخدم مثل رسل قاعدتين للاستنباط هما : (١) قاعدة التمييز

Substitution (٢) إثبات التالي Modus ponens ويطلق عليها معاً قاعدة الفصل detachment . كذلك نحن نجد أن لوكاشيفتش يطلق على القضية الصادقة المصطلح مقررة 'thesis' ، وهو يقبل أربعة قضايا أخرى صادقة بخلاف القضيتين السابقتين ، وبذا يصبح مجموع القضايا الصادقة في نسقه ٦ قضايا ، وهذه القضايا تعد بمثابة المقررات ^(١) theses الأساسية لنسقه ، وهي كما يلي :

المقررات

١ - CNMPNP

٢ - CNpNMp

٣ - CCNqNpCpq

٤ - CCNpqCNqp

٥ - CCpNqCqNp

٦ - CCpqCCqrCpr

وفي هذه المقررات نلاحظ أن ٢، ١ هما القضيتان ٢، ١ السابقتان ، وأن المقررات ٣ ، ٤ ، ٥ هي صور مختلفة لمبدأ النقل Principle of transposition أما المقررة السادسة فهي تمثل القياس الشرطي hypothetical Syllogism .

(١) الترجمة لمقرر thesis مأخوذة عن عبد الحميد صبره ، فيقول : « وكل قضية من قضايا النسق أو النظرية فنحن نقرر صدقها ، أما المسلمات فنقرر صدقها على سبيل التسليم » وأما البرهينات فنقرر صدقها باعتبارها لازمة عن المسلمات ، لذلك يطلق على كل قضية صادقة في النظرية أو النسق كلمة مقررة thesis ، والمقررات إذن تشمل المسلمات والبرهينات فكل المسلمات والبرهينات مقررات ، لكن المقررات بعضها مسلمات وبعضها الآخر برهينات . »

راجع مقدمة عبد الحميد صبره لنظرية القياس الارسطية ، ص ٢٦ - ٢٧ .

ولكن كيف يمكن إجراء البرهنة عند لو كاشيفتش ؟

خذ المثال الآتي عن كيفية البرهنة

$$3 \text{ p / Mp} \times \text{C I} - 7$$

يعني هذا المثال أنه في المقررة ٣ نرفع p ونضع بدلاً منها Mp ، فنحصل على التضمن، وأن المقررة (١) تتضمن المقررة (٧)، وما دامت المقررة (١) صادقة فإن المقررة (٧) يمكن الحصول عليها وفقاً لمبدأ إثبات التالي. وإذا تقدمنا بمثل هذه الطريقة أمكن أن نحصل على المقررات الآتية:

$$\text{CpMp} - ٧$$

$$\text{CNpMNP} - ٨$$

$$\text{CNMNpp} - ٩$$

$$\text{CNMNpMp} - ١٠$$

$$\text{CNMpMNP} - ١١$$

$$\text{CMPP} - ١٢$$

$$\text{NPNP} - ١٣$$

$$\text{NMNP} - ١٤$$

$$\text{MPNMP} - ١٥$$

$$\text{CMNPNMP} - ١٦$$

لكننا نلاحظ أن المقررات السابقة تنطوي على بعض النتائج المخالفة، مثال ذلك المقررة ٧، المقررة ١٢.

$$\text{CpMp} - ٧ \quad (p \text{ تتضمن إمكانية } p)$$

$$\text{CMpp} - ١٢ \quad (\text{إمكانية } p \text{ تتضمن } p)$$

وهذان التضمنان يعنيان أنه في المنطق الثنائي القيم فإن التعبيرين Mp, p متكافئان، ووفقاً لهذا فإن.

'to be possible'

Mp

تكافئ.

'to be true'

p

والأبعد من هذا أن يان لو كاشيفتش يجد بعض النتائج المخالفة الأخرى حينما يحلل النتائج التي يحصل عليها من القضية الموجهة الثالثة. وحتى يعبر عن هذا فسانه يلجأ إلى استخدام السور الذي يشير إلى التبسيط Σ Particularization والسور الذي يشير إلى التعميم Π Generalization (والرمزان أخذهما لو كاشيفتش من تشارلز بيرس المنطقي الأمريكي).

' Σp ' = 'For a certain p'

' Πp ' = 'For all p'

ومن ثم فالقضية الثالثة يمكن التعبير عنها Σ باستخدام هذه الأسوار. ولكن لو كاشيفتش يضيف رمزاً آخرًا لعلامة الوصل Conjunction وهو الرمز $\&$.

' Kpq ' = 'p and q'

وبهذه الصورة يمكن كتابة المقررة الثالثة في صورة رمزية كما يلي:

$\Sigma KMPMPMP - 17$

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي:

« بالنسبة لقضية معينة p ، إما p أو $non-p$ ممكنتان »

وباستخدام سور التعميم Π في المقررة 17 فإنها تصبح:

وتقرأ كما يلي :

« ليس من الصادق أنه بالنسبة لأي قضية p أن يكون كاذباً أن p ممكنة وتكون non-p بدورها ممكنة » .

وبتطبيق قواعد الاستنباط السابقة فإن لو كاشيفتش يؤسس المقررات الآتية بالتتابع :

$$CK \models pMN \models Mq - ١٩$$

$$CCpq.CNqNp - ٢٠ \text{ نقل التضمن } .$$

$$CNMqkM \models pMNp - ٢١$$

$$CNMq \Pi pNKMPNp - ٢٢$$

$$Mp - ٢٣$$

ولنحظ أن المقررة (٢٣) تعني أن « p ممكنة » على اعتبار أن p أي قضية اختيرت بصورة عشوائية. وهكذا فإننا إذا بدأنا من القضية الثالثة فإننا نتوصل إلى النتيجة القائلة بأن « كل شيء ممكن » وأن لا شيء مستحيل ، وبالتالي فإنه لا شيء ضروري. وما هو أبعد من هذا أنه إذا اتحدت المقررة (١٢) مع المقررة (٢٣) فسوف تنتج لدينا مقررة جديدة هي (٢٤) :

$$CMpp - ١٢$$

$$Mp - ٢٣$$

$$p - ٢٤$$

وهذه المقررة الأخيرة تعني أن أي قضية p هي صادقة .

لو كاشيفتش والمنطق ثلاثي القيم

لقد سبق ان أشرنا، ونحن بصدد الحديث عن بدايات منطق الموجهات، أن المنطق التقليدي ثنائي القيم، أي أنه ينسب للقضية قيمة صدق وقيمة كذب فقط. وقد نشأ هذا الوضع من طبيعة مبدأ الثالث المرفوع ذاته، الذي يقرر أن القضية إما صادقة أو كاذبة، وهذا المبدأ يعتبر أساسي للمنطق الكلاسيكي بأسره، ولكن هناك قضايا أخرى مثل، من الممكن أن أكون في القاهرة يوم ٣٠ يناير. أمثال هذه القضية لا يمكن القول بأنها ضرورية أو صادقة أو كاذبة، في الوقت الذي تم تقريرها فيه (لأن هذه القضايا ~~...~~ أرسطو تدخل في باب المستقبل الحادث). ولذلك فإن لو كاشيفتش يقدم قيمة ثالثة لمثل هذه القضية وهي القيمة ممكن 'Possible' وبناء على هذه الفكرة فإننا إذا رمزنا للمصطلح صادق بالرمز 1 وللمصطلح كاذب بالرمز 0، فإن لو كاشيفتش يعطي القيمة $1/2$ للمصطلح ممكن. كذلك فهو يرمز- للسلب Negation (الرابط functor) بالرمز N ويضع القائمة الآتية التي توضح قيم القضية ونفيها.

p	0	1/2	1
Np	1	1/2	0

الواضح من هذه القائمة أن الاختلاف الوحيد بين هذا المنطق والمنطق ثنائي القيم هو أن Np , Mp يمكن أن تأخذ القيمة $1/2$. والقيم الأخرى هي قيم متناظرة تماماً كما في المنطق ثنائي القيم.

أما في حالة التضمن C فإنه يمكن تأسيس القائمة بصورة ماثلة لكي تناظر القيم الثنائية على النحو التالي:

C	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

لقد حاول لو كاشيفتش^(١) أن يعثر على تعريف دقيق لتصور الإمكانية قبل عام ١٩٢٠، ولكن ألفرد تارسكي وهو من أبرع تلامذته أمكنه أن يقدم مثل هذا التعريف عام ١٩٢٠ حيث يعرف الإمكانية:

$$D_2 \quad M p = C N p p$$

أي أن p ممكنة، تعرف، إذن $non-p$ إذن p .

والتعبير ' $CN p p$ ' الذي يحدد إمكانية قضية ما p يكون كاذباً فقط عندما تكون p ذاتها كاذبة، وفي كل الحالات الأخرى فإن هذا التعبير صادق. ووفقاً لهذا فإن:

$$M_0 = 0 \quad , \quad M_{1/2} = 1 \quad , \quad M_1 = 1$$

وعلياً أن نلاحظ أنه في الحساب ثنائي القيم فإن التعبير ' $CN p p$ ' مكافئ لـ ' p '، ولكن هذا لا ينطبق في حالة الحساب ثلاثي القيم - Three

(١) نلاحظ أن لو كاشيفتش في بداية أبحاثه تبني تعريف الإمكانية البحتة وفقاً للصفة:

$$D_1 \quad M p = A \exists p N p \Pi q N C p \Pi q$$

حيث الرابط A يعني الفصل المنطقي، بينما \exists تشير إلى التكافؤ المنطقي. ويمكن قراءة العبارة كما يلي:

p ممكنة، تعني إمام أو $non-p$ متكافئتان أو أنه لا يوجد أي زوج من القضايا المتناقضة من p . ولكن لو كاشيفتش امتنع عن استخدام هذا التعريف بعد أن قام تارسكي تعريفه.

valued Calculus (حيث توجد ثلاث قيم هي 0، 1/2، 1) حيث تكون الحالة $M \models 1/2$. وعلى هذا فإن المقررة ثنائية القيم 'CCNpp' ليست صحيحة في الحساب ثلاثي القيم إذا كانت قيمته p هي 1/2.

كذلك فإن لوكاشيفتش يعرف الضرورة كما يلي:

D_p

$$N \models Np = N Cp Np$$

أي أن:

' p ضرورية' تعني 'أنه ليس من الصادق أن p إذن p non-p'.

وعلى أساس تصور الإمكانية الذي قدمه لوكاشيفتش فإن قضايا الموجهات السابق وصفها هي قضايا صادقة ومتسقة. وحتى نبرهن على أن صيغة معينة هي تحصيل حاصل (مقررة) فإن لوكاشيفتش يستخدم طريقة القائمة بالإضافة إلى التعويض وقاعدة إثبات التالي. على سبيل المثال لكي نبرهن على الصيغة $Cp Mp$ إذا p صادقة إذن p ممكنة نصمم القائمة ونضع في اعتبارنا القيم المتناظرة للتضمن والإمكانية.

p	Mp	$CpMp$
0	0	1
1/2	1	1
1	1	1

الصيغة $CDMD$ هي تحصيل حاصل لأنها دائماً تأخذ القيمة 1.

بناء على كل هذه الأفكار فإنه يمكن لنا أن نعرض النسق الذي يقدمه لوكاشيفتش للمنطق ثلاثي القيمة بصورة متسقة بحيث نقف على أهم مبادئ وأفكاره الأساسية.

التركيب الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم .

يتألف البناء الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم عند لوكاشيفتش من أربعة أجزاء أساسية هي :

أولاً : الأفكار الابتدائية .

١ - المتغيرات القضائية p, q, r, \dots وكل منها يأخذ ثلاث قيم هي صادق، كاذب، يمكن $\{M, F, T\}$ وهذه القيم عددياً هي 1، 0، $1/2$ على التوالي .

٢ - رابط التضمن **Function of Implication** ويرمز له بالرمز C .

٣ - تصور الإمكانية ويعرف كما يلي :

$$D_2 \quad MP = CNPP$$

ثانياً : الأفكار المعرّفة **Defined Idess** .

توجد روابط أخرى تعرف كما يلي :

١ - الفصل المنطقي ويرمز له بالرمز Δ ويعرف كما يلي :

$$D_4 \quad Apq = CCpq$$

ب - الوصل المنطقي ويرمز له بالرمز \equiv ويعرف كما يلي :

$$D_5 \quad Kpq = NANpNq$$

جـ - التكافؤ المنطقي E ويعرف كما يلي :

$$D_6 \quad Epq = KCpqCqp$$

ثالثاً: البديهيات

توجد لدينا في النسق أربع بديهيات أساسية هي :

$$CqCpq \quad ١ -$$

$$CCpqCCq \quad Cpr \quad ٢ -$$

$$CCCpNppp \quad ٣ -$$

$$CCNqNpCpq \quad ٤ -$$

وقوائم الصدق الخاصة بهذه البديهيات تبين أن هذه البديهيات صادقة أو
تحصيل حاصل إذا أخذت المتغيرات القيم 0 ، 1 . على التوالي.

الفصل الثالث

هلبرت والصورية البحتة

حاول دافيد هلبرت تأصيل الصورية في المنطق الرياضي من خلال كتاباته^(١) التي دونها ، وأراد مثل فريجه ورسل أن يؤسس ويدعم أسس الرياضيات Foundations of Mathematics عن طريق المنطق الرياضي،

(١) من أهم كتابات هلبرت ما يلي:

- Mathematische Probleme (Mathematical problems, congress of Mathematics, Paris, 1900).
- ~~Über~~ die Grundlagen der logik und der Arithmetik, On the Foundations of logic and Arithmetic, International Congress of Mathematics, Heidelberg, 1904).
- Axiomatische Denken (Axiomatic thinking, Mathematische Annalen, 1918).
- Die Grundlagen der Mathematik, Hamburg, 1928.
- Beweis des Satzes von datur (The demonstration of Excluded Middle, Göttingen, 1931).
- ~~Naturwissen~~ und logik (Knowledge of Nature and logic, Göttingen, 1931).

وكتب مع أكرمان Ackermann مؤلفاً بالألمانية بعنوان ~~Grundzüge~~ der theoretische logik وترجم إلى اللغة الإنجليزية عام ١٩٥٠ بعنوان Principles of Mathematical logic كما صدر له بالاشتراك مع برنيز Bernays كتاب (أسس الرياضيات) Grundlagen der Mathematik الجزء الأول منه صدر عام ١٩٣٤ وصدر الجزء الثاني عام ١٩٣٨. ومن أهم مؤلفات هلبرت الأخرى (أسس الهندسة) Grundlagen der Geometrie الذي صدر عام ١٨٩٩ ، وترجم إلى الإنجليزية عام ١٩٠٢ بعنوان The Foundations of Geometry كما ترجم إلى اللغة الفرنسية أيضاً.

وهو ما أسماه المنطق النظري **Theoretical logic** أو الرياضي أحياناً.

ونقطة البدء عند هلبرت كما يلي: ليس مقصوداً بالمنطق أن يدرس موضوعات معينة، تماماً كما تفعل أي نظرية رياضية، ولكن المقصود به أن يدرس القضايا التي يمكن تدوينها عن هذه الموضوعات. وبكلمات أخرى فإن اللغة التي نستخدمها في النظرية الرياضية شيئاً قائماً بذاته، واللغة التي نستخدمها حين نتكلم عن هذه النظرية شيء آخر.

معنى هذا أن هلبرت ينظر للغة الرياضة كشيء مستقل ويردها إلى عناصرها حتى يمكن دراستها كلغة رياضية في حد ذاتها. وهذه الفكرة هي ما يطلق عليه هلبرت مصطلح، ما وراء الرياضيات، **Meta-mathematics**، وأحياناً، ما وراء المنطق، **Metalogic**. من أجل هذا الهدف شعر هلبرت بالحاجة إلى لغة دقيقة هي لغة المنطق الرياضي التي وجدها بصورة سلسة في برنكييا، وكل ما كان ينبغي عليه أن يفعله يتمثل في تبسيط هذه اللغة بصورة أكثر وتوسيعها لتفي بأغراض البرنامج الذي يدعو إليه. ووفقاً لهذا فإن على المنطقي في نظره أن يؤلف بين الرموز البحتة، وأن يضع هذه التأليفات تحت منظار الاستدلال دون أن يفكر فيها تعنيه، ودون أن يضمني الفكر عليها. وهنا فإن هلبرت ينظر للمنطق على أنه منطق قواعد **Rules** معينة، أو هو منطق علاقات، أو كما قال هو ذاته إن للرموز ناحيتين هما، (١) أنها تستخدم في القواعد الصورية **Formal Rules**، (٢) أنها بلا معنى ولها القدرة على الحركة.

ويرى هلبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماماً، وأن الرياضيات متحررة تماماً من أي افتراضات قبلية. وحتى يمكن أن تؤسس الرياضيات فإننا لسنا بحاجة إلى معونة إلهية على ما يرى كرونكر^(١)

(١) كرونكر مبن دعاء المذهب الحدسي في أسس الرياضيات، وهو معاصر لفريشتراس =

Kronecker ، أو أي افتراض لذكاء إنساني خاص كما يدعي هنري بوانكاريه Poincaré ، أو أي حدس أولي كما يدعي بروور Brouwer ، أو حتى بديهيات قابلة للرد كما يرى رسل وهابتهد . إن هلبرت يعتقد في إمكانية إنجاز أسس الرياضيات بدون كل هذه الفروض إذا نظرنا للرياضة البحتة من وجهة نظر صورية خالصة ، والطريقة الوحيدة التي يمكن بواسطتها إنجاز هذا العمل هي الطريقة الاكسيوماتيكية التي اتضحت في أبحاث هلبرت منذ حوالي عام

Welerstrass وكان زميلاً له في جامعة برلين . وآراء كرونكر يمكن إنجازها فيها يلي :

١ - أن كرونكر يفترض على التحمس الزائد لدى بعض الرياضيين لتأسيس الرياضيات على أساس بعض المفاهيم مثل المجموعة المنتهية Finite والأعداد الحقيقية Real Numbers بناء على فكرة اللانتهية Infinite . ومع أنه يرى أن مدخل التحبيب Arithmetization هو المدخل الصحيح للتحليل والرياضيات ، إلا أن أفكاره الأساسية فيها يتصل بالتحبيب تستبعد استخدام المجموعات اللانتهية من التعريفات والأعداد ، وفي هذا نجد يقول : لقد خلق الله الأعداد الصحيحة ، ولكن ما عدا ذلك فهو من صمم عمل الإنسان .

راجع في ذلك :

Beh, E.T., The Queen of the Sciences, Baltimore, Williams and Wilkins, 1931, p. 34.

ب - يقرر كرونكر أن الأعداد الطبيعية والعمليات التي تقوم بينها إنما يمكن تأسيسها حدسياً ، وأن الأعداد الجبرية والعمليات التي تقوم بينها يمكن تأسيسها من خلال الأعداد الطبيعية وعملياتها ، لكن الأعداد الحقيقية ليست قابلة لمثل هذا التأسيس ، ولهذا السبب نجد أنه ينكر نظرية كانتور Cantor باعتبارها ليست نوعاً من الرياضيات وإنما هي صورة من صور التصوف Mysticism . راجع في ذلك :

Struik, D.J., A Concise History of Mathematics, 3 Vols. New York, Dover Pub. 1948 p. 243.

ج - كل التعريفات والبراهين في العلم الرياضي يجب أن تكون تركيبية

Constructive

د - أن الأحكام ذات الطبيعة المنطقية البحتة لا تفصي ضرورة الى نظريات رياضية مشروعة.

١٩٠٠ ، وهي تضع ذلك التمييز الدقيق بين التصورات الابتدائية المسموح بها بدون أي تعريفات ، وبين التصورات المشتقة عن طريق التعريفات ، أي بين البديهيات والمبرهنات ، وهي أيضاً طريقة تؤسس قواعد الاستنباط في نظره ^(٢) .

أما الطريقة الإكسيوماتيكية التي يدعو إليها هيلبرت فهي جهاز من الرموز ، لا شيء فيه يوجد بصورة عرضية ، وإنما كل شيء يسر وفق القواعد الصورية الدقيقة . واختيار البديهيات *Choice of Axioms* في هذه الطريقة يخضع لثلاث اعتبارات أساسية هي :

أولاً : أن البديهيات يجب أن تكون مستقلة *Independent* ، أو بمعنى آخر لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى ، لأنه في هذه الحالة سيزداد عدد البديهيات ويتطلب الأمر اختزالها إلى أقل عدد ممكن .

ثانياً : لا بد أن يكون عدد البديهيات كافياً بحيث يسمح باستنباط المبرهنات *Theorems* من النظرية التي لدينا .

ثالثاً : يتعين أن تكون البديهيات غير متناقضة . وهذا الشرط يعد من أهم الشروط على الإطلاق في أي نسق بديهي *Axiomatized system* ، وهو أيضاً أصعب الشروط .

إلا أنه يمكننا أن ننظر إلى الشرط الثالث على أنه الخاصة التي ينبغي أن يتسم بها أي نسق استنباطي أو إكسيوماتيكي على الإطلاق ، على حين أن

(٣) راجع في ذلك ،

a - HILBERT, L., SUPPES, P., and TARSKI, A., *The Axiomatic Method*, Amsterdam, North-Holland pub. Co., 1959.

b - HILBERT, O., *On The Theory of axiom-system*, Analysis, vol. 3, 1935, pp. 1-11.

الشرط الأول وكذلك الشرط الثاني، عادة ما ننظر إليهما على أنها بمثابة شروط اقتصادية Economical بالنسبة للنسق.

ويترتب على هذه الشروط الثلاثة، ظهور مشكلات ثلاث أساسية تواجه أي نسق إكسيوماتيكي وهذه المشكلات هي :

١ - أن على النسق الإكسيوماتيكي أن يبرهن على عدم تناقض بديهياته .

٢ - كذلك لا بد وأن يكشف لنا النسق عن استقلال البديهيات .

٣ - وأن يبرهن على تمام Completeness البديهيات .

وانطلاقاً من الحقيقة القائلة بأن الرياضيات تحوي تصورات منطقية بحتة ، وأن المنطق يحتوي على تصورات رياضية (مثل فكرة العدد) فإنه لا يمكن تشييد المنطق بمعزل عن الرياضيات ، كما أن الرياضيات لا يمكن أن تنفصل عن المنطق ؛ لذا كان من الضروري أن يتم تأسيس المنطق والرياضيات ، منذ البداية ، في طريقة هيلبرت بالتوازي معاً ، وهذا ما افترضه هيلبرت ، ويمكن تلخيص طريقة هيلبرت الإكسيوماتيكية التي اتبعتها المدرسة الصورية من بعده على النحو التالي :

(١) أن الرموز الأساسية في المنطق والرياضيات يمكن حصرها في رمزين

هما :

أ - رمز السلب Negation ويرمز له هيلبرت بالرمز —

ب - رمز التضمن Implication ويرمز له هيلبرت بالرمز \rightarrow .

(٢) أن كل التأليفات التي نتوصل إليها من الرموز التي نضعها في

اعتبارنا « ولها معنى في الرياضيات الكلاسيكية ، يمكن تمييزها بدقة حين نطلق عليها المصطلح « صيغ » Formulae : والصيغة يكون لها معنى فحسب في

حالتين: حينما تكون صادقة صدقاً مطلقاً، وحينما تكون كاذبة كذباً مطلقاً ويمكن أن تمثل لحالي الصدق والكذب بمثال من الرياضيات المألوفة. إذا قلت $1 + 1 = 2$ ، هذه صيغة ذات معنى لأنها صادقة، وكذلك الصيغة $1 + 1 = 1$ صيغة لها معنى أيضاً لأنها كاذبة، أما الصيغ التي ليست ذات معنى مثل $1 + \rightarrow = 1$ فهي لا تمثل شيئاً، ومن ثم لا يمكن القول بأنها صادقة أو كاذبة.

(٣) أن الإجراء الذي نقوم به ويسمح بنجاح هذه الصيغ، وينتظر الصيغ المبرهنة في الرياضيات الكلاسيكية، هو ما نسميه البرهان.

(٤) أن الصيغ التي تناظر اثباتات الرياضيات الكلاسيكية والتي يمكن تحقيقها في حدود المنتاهي يمكن البرهنة عليها، أي يمكن تأسيسها - وفقط عندما يكون الحساب الفعلي للإثبات الرياضية المناظرة ينتج من صدق الصيغ الملزمة.

والواقع أن البرنامج الذي اقترحه هلبرت على النحو السابق يتضح منه أن النقاط الثلاث الأولى ترجع إلى رسل ومدرسته. أما النقطة الرابعة والتي تعني أنه من الممكن إبدال الرموز المنطقية برموز أخرى حسابية (عن طريق الأعداد الطبيعية) تفضي بنا إلى قضايا حسابية *Arithmetical Proposition* (ذات أعداد طبيعية) صادقة، ومن ثم فإنه إذا كانت قضية رمزية يمكن أن ترد إلى $1 = 2$ ، فإن هذا لا يمكن البرهنة عليه بذات الطريقة في ظل وجود النقطة الثالثة، وهذا يعني أنها غير قابلة للبرهان من خلال النسق وإطاره العام، أي البرهنة على عدم تناقض هذا النسق، لأن الأمر الهام بالنسبة لهلبرت هو عدم التناقض.

ولكن يمكن لنا أن نقوم بإجراء بعض التصحيحات للنقطة الثالثة بالذات عند هلبرت على الصورة التالية:

(٣ أ) بعض الصيغ المعينة تسمى بديهيات.

(٣ ب) إذا كانت a, b صيغتين (صادقتين أو كاذبتين) وكان فيما يتعلق بالقضية $a \rightarrow b$ أمكن البرهنة عليها، إذن فإن a أيضاً قابلة للبرهان (قاعدة إثبات التالي) ولكن لتقرير ما إذا كان من الممكن البرهنة على صيغة معطاة لدينا، مهما كانت هذه الصيغة - بطريقة عامة ومحدودة - فإن هذه مشكلة أكثر تعقيداً، وهي في حد ذاتها تؤلف موضوع ما نسميه «مشكلة القرار» *Problem of decision*. أضف إلى هذا أنه توجد البديهيات التي نجد لها تطبيقاً في الرياضيات الكلاسيكية، وبطبيعة الحال يوجد عدد لا نهائي من هذه الصيغ «وكل صيغة يمكن أخذها كبديهية». كذلك فنحن إذا اعتبرنا أن كل رمز يمكن استبداله بعدد، فإنه ينتج عن ذلك أن هذه الصيغ يمكن تمثيلها بالتعبيرات $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, \dots$ وهي تحصيلات حاصل، كما يرى فتجنشتين، ويمكن الحصول عليها بالتعويض من عدد محدود من الصيغ.

كذلك فإن مشكلة التناقض داخل النسق الرياضي الذي أراد هيلبرت تأسيسه يمكن أن ترد إلى المشكلة الآتية: إذا كان لدينا النسق الرياضي S وهو نسق متناقض، فإنه سوف يتضمن برهاناً على الصيغة $1 = 2$ ، وهذا البرهان سوف يفضي إلى مجموعة متناهية من البديهيات، التي يمكن أن نشير إليها بالرمز M_0 وهذا سوف يعني بالضرورة أن المجموعة M_0 متناقضة، ومن ثم فإن مشكلة عدم التناقض الخاصة بالنسق ترد إلى مشكلة عدم تناقض بديهاته.

نظرية حساب القضايا في نسق هيلبرت

تبدأ نظرية حساب القضايا عند هيلبرت - وفق مذهبه الإكسيوماتيكي - متخذة مسار البرنكييا ولكن بإجراء بعض التعديلات الطفيفة على نسق البرنكييا كما يلي:

الأفكار الابتدائية Primitive Ideas

١ - $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ متغيرات قضائية Propositional Variables يمكن أن تأخذ قيمتين (صديق، كاذب)

٢ - الفصل : ويرمز له بالرمز \vee

٣ - الوصل : ويرمز له بالرمز \wedge

٤ - التضمن : ويرمز له بالرمز \rightarrow

٥ - التكافؤ : ويرمز له بالرمز \leftrightarrow

٦ - السلب : ويرمز له بالرمز \neg

٧ - أنه إذا كانت X قضية فإن $\neg X$ نفيها.

البديهيات

يضع نسق هلمبرت البديهيات الأربع التالية والتي تعد بمثابة قضايا صادقة أو هي تحصيل حاصل وهي :

$$a - \neg X \vee X \rightarrow X$$

$$b - \neg X \rightarrow X \vee X$$

$$c - \neg X \vee Y \rightarrow Y \vee X$$

$$d - (X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg X \vee X \rightarrow Z \vee Y)$$

قواعد الاستنباط

وتنحصر في :

أ - قاعدة التعويض

ب - قاعدة الاستنباط (إثبات التالي)

ويمكن البرهنة على النظريات باستخدام الأفكار الابتدائية والقضايا
الصادقة (البديهيات) عن طريق تطبيق قواعد الاستنباط. وهنا فإنه يتمين
علينا أن نناقش هيلرت في نسقه.

أولاً: أن نظرية هيلرت تبدأ من الأفكار الابتدائية وهي ذاتها الأفكار
التي تبدأ منها نظرية رسل، فيما عدا الرموز التي استحدثها للمتغيرات، فقد
وضع هيلرت الرموز γ, x, \dots بدلا من p, q, \dots ، وكذلك رمز للوصول
والتضمن والتكافؤ برموز جديدة، ورمز لنفي القضية بعلامة $(-)$ فوق
المتغير ذاته.

ثانياً: أن البديهيات التي حددها هيلرت تستخدم التضمن والفصل على
حين أن بديهيات رسل تستخدم فكرة السلب بالإضافة إلى التضمن والفصل.

ثالثاً: أن القواعد الأساسية للاستنباط كما هي. لقد عدل هيلرت في
شكل الرمزية، لكن لم يتمكن من إجراء تعديل على فكرة التضمن التي أودعها
رسل وهو ابتعد البرنكيبي، وبذا فإن فكرة التضمن تظل كما هي الفكرة
المحورية حتى في نسق هيلرت. لقد انصب التعديل إذن على الرمزية ولم
يتجاوزها إلى النسق.

الفصل الرابع

كواين وحركة تصحيح المفاهيم

لم تكن حركة تصحيح مفاهيم المنطق الرياضي في تقدمها أقل من محاولات ابتكار أنساق منطقية على غرار نسق برنكييا، ولذا وجدنا قلة من المناطق يتجهون هذا الاتجاه، ومن بينهم، بل من أهمهم على الإطلاق كواين^(١) W.V. Quine الذي حاول أن يصحح المفاهيم المنطقية والرياضية من خلال تتبع تاريخي دقيق للأفكار، وكيفية استخدامها في الأنساق المختلفة. ومن ثم فإنه يتعين علينا أن نقف على جهودات كواين في هذا المضمار.

لقد خصص كواين كتابه «مناهج المنطق» لبحث موضوعات شتى تتعلق بالمنطق الرياضي، ومن أهم الموضوعات التي تناولها في القسم الأول دالات الصدق؛ حيث عرض لهذه الدالات كما هي مستخدمة في المنطق الرياضي، خاصة نسق البرنكييا، وحاول أن يقدم من خلال هذا الاستعراض فكرته الدقيقة عن الدالات باعتبارها من المفاهيم الرئيسية.

(١) من أهم كتابات كواين:

- Mathematical logic, New york, 1940
- Elementary logic, Boston, 1941
- From a Logical Point of view, Harvard, 1953
- Selected logical Papers, New york, 1961
- Methods of logic, London 1st ed, 1950. Third ed. 1970.

وأول الدالات التي يتناولها كواين بالتصحيح دالة السلب . لقد اتضح له أن علامة السلب المستخدمة في برنكييا ماتماتيكا وهي العلامة (~) لا تصلح للتطبيق إذا كانت لدينا متغيرات كثيرة في الدالة وأردنا تطبيق السلب عليها ، ولذا فإنه كما يقول ^(١) يفضل العلامة (-) التي استخدمها تشارلز بيرس في رمزيته . فإذا كان لدينا المتغير p مثلاً وأردنا التعبير عن سلبه ، فإننا نكتب المتغير في صورته الجديدة السالبة كما يلي (\bar{p}) . وإذا أردنا أن نعبر عن سلب السلب بالنسبة لذات المتغير فإن ذلك يكون بكتابة المتغير على النحو ($\bar{\bar{p}}$) ، وهذا هو سلب السلب الذي يكافئ المتغير p منطقياً .

ومن جانب آخر فإن التعبير بطريقة كواين عن دالة الوصل يمكننا من اختصار الثوابت المستخدمة في برنكييا . فإذا كان لدينا المتغيرات r, q, p مثلاً ، فإنه يمكننا التعبير عن صدقها جميعاً في دالة وصل واحدة حين نضع المتغيرات وضعاً متجاوراً في الصيغة (pqr) . ويستتج كواين قانون صدق هذه الدالة كما يلي : تصدق الدالة فقط وفقط إذا صدقت جميع القضايا الموجودة في الدالة . وتكذب الدالة فقط وفقط إذا كانت قضية واحدة من هذه القضايا على الأقل كاذبة .

ومن هذه الصورة يتوصل كواين إلى أن الوصل بين القضية ونفسها يكافئ القضية ذاتها أي أنه يمكننا اختصار الصيغة .

(pp)

وفقط إلى الصيغة

p

أما دالة الفصل فإن كواين يجد أنه من الأفضل معالجتها بصورة أدق بما عرضه نسق برنكييا ، لأن الفصل يقع على الأقل في معنيين :

١ - الفصل الاستبعادي exclusive disjunction وهو ذلك الذي يستبعد صدق القضيتين معاً إلى جانب استبعاده كذبهما معاً :

٢ - الفصل غير الاستبعادي non exclusive disjunction وهو الذي يقرر صدق القضيتين معاً ، ولكنه يستبعد كذبهما معاً .

خذ المثال الآتي ليوضح ما يعنيه كواين بدالة الفصل « الجنود منتصرون أو الجيش متقدم » ، لهذه القضية أربعة احتمالات وهي :

الحالة الاولى : الجنود منتصرون	والجيش متقدم
الحالة الثانية : الجنود ليسوا منتصرين	والجيش متقدم
الحالة الثالثة : الجنود منتصرون	والجيش ليس متقدماً
الحالة الرابعة : الجنود ليسوا منتصرين	والجيش ليس متقدماً

إنه وفقاً لرأي كواين فإننا استخدمنا الفصل بالمعنى الاستبعادي ونجد أن الدالة تكذب في الحالة الأولى « الجنود منتصرون والجيش متقدم » ، وفي الحالة الرابعة « الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً » . كما أن الدالة تكون صادقة في الحالة الثانية « الجنود ليسوا منتصرين والجيش متقدم » ، وفي الحالة الثالثة « الجنود منتصرين والجيش ليس متقدماً » . أما إذا استخدمنا الفصل بالمعنى غير الاستبعادي فسوف نجد أن الحالة الرابعة وهي « الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً » هي الحالة الوحيدة التي تكذب فيها دالة الفصل ، على حين أن الدالة وفقاً للتعريف السابق سوف تصدق في الحالات الثلاث الأولى .

لذلك فإن كواين يفضل استخدام دالة الفصل بالمعنى غير الاستبعادي ، وهو نفس المعنى الذي استخدم في البرنكييا . فإذا كان لدينا المتغير p والمتغير q وأردنا أن نعبر عن الفصل الاستبعادي لهما ، فإن ذلك يكون من خلال الصيغة :

$$(p \bar{q} = \bar{p} q)$$

على هذا الأساس فإن دالة الفصل تصدق إذا صدقت واحدة على الأقل من قضايها .

ويضع كواين العلاقة بين الوصل والفصل والسلب بصورة محددة فنجد

يُميز بين بعض الصيغ التي تبدو متشابهة وهي :

- | | |
|-----------------------|------------------------------|
| 1. $(\bar{p} q)$ | and - (pq) |
| 2. $(\bar{p} \vee q)$ | and - $(p \vee q)$ |
| 3. - (pq) | and $(\bar{p} \bar{q})$ |
| 2. - $(p \vee q)$ | and $(\bar{p} \vee \bar{q})$ |

فقد يبدو لنا في كثير من الأحيان أن هذه الصيغ متشابهة ، لكن واقع الأمر أن ثمة اختلافات يَبْنة تبدو من وضع الصيغ ذاتها . على سبيل المثال نحن نجد أن الحالة الأولى التي تقرر تمييز الصيغ $(\bar{p} q)$ نجد أن p فقط هي التي سلبت ، على حين أن الحالة المقابلة - (pq) تبين أن السلب يطبق على ما بداخل الأقواس ككل . كما ويتضح هذا الاختلاف من قراءة كل صيغة على حدة . فالصيغة $(\bar{p} q)$ نقرأ « ليست هي الحالة أن p وهي الحالة أن q » . أما الصيغة المقابلة فنقرأ « ليست هي الحالة أن كلا من p ، q » .

ويوضح كواين بناء على ما أشار إليه من معاني السلب والوصل والفصل أن القضية \bar{p} تكون صادقة فقط إذا كانت p كاذبة ، وأن « $p q \dots s$ » تصدق فقط إذا كانت $s \dots q, p$ صادقة كل على حدة ، وأن « $p \vee q \vee \dots \vee s$ » تصدق إذا لم تكن « $p \dots q \dots s$ » كاذبة جميعاً . وهذا يعني أن صدق أو كذب دالات السلب والوصل والفصل يتوقف على صدق أو كذب القضايا المكونة لها ، ومن ثم فهو يعرف الدالة على أنها أي « مركب من جل إخبارية يتوقف صدقها في كل الحالات على قيم الصدق لأجزائها المكونة لها ، ومن ثم تصبح دالة

صدق»^(١). وحتى يبين كواين أهمية هذا التعريف، فإنه يزودنا بمثال يكشف عن تعريفه بصورة دقيقة. فإذا كان لدينا المركب الإخباري «مات جونز لأنه تناول سمكاً بالآيس كريم». في هذا المثال نجد لدينا الحالة «مات جونز»، والحالة «جونز تناول سمكاً بالآيس كريم»، فنحن هنا إذا سلمنا بالحالتين كل على حده أمكننا أن ننكر صدق القضية المركبة والمؤلفة لها حيث صدق المركب يتوقف على صدق الأجزاء المؤلفة للمركب. لكن إذا كانت لدينا الحالات:

- (١) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم ومات. (وصل)
- (٢) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم أو مات. (فصل)
- (٣) لم يميت جونز. (نفي)

فإنه لا يمكن إنكار صدق أو كذب المركب ما دمنا قد عرفنا صدق أو كذب أجزاء المركب. وعلى هذا الأساس فإنه يمكن التعبير عن دالة الصدق truth - Function عن طريق استخدام قائمة تبين حالات الصدق والكذب المتعلقة بكل حالة من حالات صدق أو كذب المتغيرات التي تربط بينها الدالة.

والسؤال الذي يفرض نفسه الآن: هل تكفي دالة السلب والوصل والفصل وحدها لتأسيس دوال الصدق؟ إن كواين يرى ذلك، بل إنه يذهب إلى ما هو أبعد حين يقرر أن دالة السلب والوصل وحدها تكفيان لهذا الغرض بدون الاستعانة بدالة الفصل، ويقدم لنا المثال الآتي:

$$(p \text{ excl} - \text{or } q)$$

تكذب هذه الدالة في حالتين «وتصدق في حالتين:

١ - حالي الكذب

- تكذب الدالة إذا كانت p صادقة ، q صادقة .
- تكذب الدالة إذا كانت p كاذبة ، q كاذبة .

٢ - حالي الصدق

- تصدق الدالة إذا كانت p كاذبة ، q صادقة .
- تصدق الدالة إذا كانت p صادقة ، q كاذبة .

ومن ثم فإنه يمكن التعبير عن الصيغة ^(١) ($p \text{ excl - or } q$) بالصيغة :

$$- (pq) - (\bar{p} \bar{q})$$

التي تعبر عن الوصل بين (pq) - و $(\bar{p} \bar{q})$. ذلك لأن هذا الوصل ينكر $(p \vee q)$ ، $(\bar{p} \bar{q})$. وعلى هذا الأساس يخلص كواين إلى النتيجة القائلة بأن $(p \text{ excl - or } q)$ تكون كاذبة في حالتين حينما تكون $(\bar{p} \bar{q}) - (pq)$ = صادقة . وهنا تكون فكرة كواين صحيحة حيث الوصل والسلب وحدهما يكفيان ، نظراً لأن دالة الفصل الاستبعادي تكون زائدة ^(٢) .

كذلك يثبت كواين أن دالة الفصل غير الاستبعادي زائدة ، وينطبق عليها ما ينطبق على الفصل الاستبعادي ، حيث الصيغة $(p \vee q)$ تكون كاذبة إذا كانت $p \vee q$ كاذبتين ، ومن ثم فإنها تصدق إذا لم يكذباً معاً ، أي حين نعبر عنها بالصيغة $(\bar{p} \bar{q})$. -

ويحاول كواين أن يشرح فكرته بدقة من خلال مثال يفترض فيه بعض التعقيد . افترض دالة صدق للمتغيرات $p \vee q \vee r$. وهذه الدالة تصدق في خمس حالات ، وتكذب في ثلاث حالات .

ibid. p. 11

(١)

ibid. p. 16

(٢)

حالات الصدق

1.	p False	q true	r true
2.	p true	q False	r true
3.	p true	q true	r False
4.	p False	q true	r False
5.	p False	q False	r False

حالات الكذب

1.	p true	q true	r true
2.	p False	q False	r true
3.	p true	q False	r False

والدالة في حالات الكذب الثلاثة الأخيرة يتم التعبير عنها كما يلي :

$$(p \vee q \vee r) - 1$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) - 2$$

$$(p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) - 3$$

وحق نعبّر عن الدالة في وصل واحد ، فإن سلب هذه الدالات الثلاث يتم في الوصل الآتي :

$$- (p \vee q \vee r) - (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) - (p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$$

ويلاحظ أن هذا الإجراء يمكن تطبيقه على أي مركب حيث نقوم بعمل وصل لسلب كل الحالات التي تكذب فيها الدالة. ويوضح كواين أن الاستثناء الوحيد لهذا الإجراء يكمن في الصيغ التحليلية. فإذا كان لدينا مركب من القضايا $p \vee q \vee r \vee s$ ، وهذا المركب على هيئة صيغة تحليلية ، فإننا

نستطيع أن نعبّر عن هذا المركب في صيغة وصل وسلب واحدة كما يلي :

$$- (p \bar{p} \sqcup r s)$$

حيث $(p \bar{p})$ كاذبة دائماً .

من هنا يستنتج كواين أن السلب والوصل يكفيان وحدها فقط للتعبير عن الدالات المنطقية . ولكن هذه الفكرة لا تستبعد مجال من الأحوال فكرة الفصل ؛ لأن الوصل (pq) يمكن إحلال الفصل $(\bar{p} \vee \bar{q})$ - بدلا منه . ولما تنبّه كواين إلى هذه الفكرة ^(١) حاول أن يستخدم ثابت عدم الاتساق $(/)$ الذي أشار إليه شيفر Sheffer عام ١٩١٣ ، حيث الصيغة (p / q) تصدق فقط إذا لم تكن p, q صادقتين معاً ، ومن ثم فإن الصيغة (p / q) تكافئ الصيغة (pq) . -
كما أن الصيغة (\bar{p}) يمكن التعبير عنها بالصيغة البديلة (p/p) وتعني أن p ليست متسقة مع نفسها . وكذلك الصيغة $(p q)$ يعبر عنها بالصيغة البديلة الآتية : $(p/q) / (p/q)$.

يتضح لنا إذن أن ثمة تطوراً حدث في مفهوم السلب والوصل والفصل عند كوامين ، وقد استهيم هذا تطورات أخرى حدثت في مجال مفهوم التضمن . وقد سبق أن أشرنا ونحن بصدد استعراض مجهودات لويس في تناول فكرة التضمن ، أن المناطقة ينظرون إلى هذه الفكرة باعتبارها عوورية في أي نسق منطقي ، لهذا فإن كواين تناول فكرة التضمن مرة أخرى حتى يبين مدى اتساق الأفكار التي ذهب إليها ، وهذا التناول يستند إلى فكرة لويس أيضاً المستمدة من رسل حيث يقام التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري . فإذا كانت لدينا الصيغة $(p \supset q)$ فإن هذه الصيغة تعبر عن دالة شرطية حيث p مقدم ، antecedent ، q تال Consequent

والشرط هنا يكمن في أنه (إذا... إذن...). لقد أوضح المنطقة قبل كواين أن صورة هذه الدالة تثبت الشرط؛ إلا أن كواين يرى أن إثبات الدالة الشرطية يعد بمثابة إثبات شرطي للنتيجة التي تنطوي عليها أكثر من كونها إثباتاً للشرط نفسه^(١).

واتساقاً مع المبادئ المعروضة في برنكييا ماتياتيكا يرى كواين أن لهذه الدالة ثلاث حالات للصدق وحالة واحدة للكذب:

حالات الصدق:

(١) حالة صدق المقدم وصدق التالي معا

(٢) حالة كذب المقدم وصدق التالي

(٣) حالة كذب المقدم وكذب التالي

حالات الكذب:

(١) حالة صدق المقدم وكذب التالي:

ولكنه مع هذا يشير إلى أن هذه الدالة زائدة ويمكن الاستغناء عنها باستخدام أحد صيغتين^(٢):

الصيغة الأولى: وتمثل في استخدام السلب والوصل مثل (p q) -.

الصيغة الثانية: وتمثل في استخدام السلب والفصل مثل (p v q).

ولكن يبدو أن كواين قد غابت عنه نقطة هامة، ذلك أن نسق برنكييا يحدد بصورة دقيقة تعريف التضمن بدلالة السلب والفصل من جهة، ثم تعريفه مرة أخرى بدلالة السلب والوصل من جهة أخرى، وهذا ما يبدو لنا

Ibid, p. 19 .

(١)

Ibid, pp. 19-20

(٢)

بوضوح من تعريف البرنكييا للتضمن كما يلي :

$$\begin{aligned} p \supset q &\equiv \sim p \vee q & df \\ &= \sim (p \cdot \sim q) & df \end{aligned}$$

ومن ثم فإن الاختلاف الوحيد بين كواين والبرنكييا في وضع هذه الدالة يكمن في مسألة التجاور بين المتغيرات وعلامة السلب الجديدة، إلى جانب هذا فإنه لا يمكن لنا الأخذ بفكرة كواين في الاستغناء عن دالة التضمن واستخدام بدائلها. ذلك لأننا داخل نظرية البرهان حين نأخذ في البرهنة على نظرية من النظريات كتلك المعروضة في البرنكييا إنما نستند إلى قاعدة التعويض الذي يعني استخدام البدائل طالما أن البرهان يتطلب ذلك.

إلا أن الجديد في فكرة كواين عن الشرط هو تمييزه الدقيق بين أربعة أنواع من الشرط هي: (١) الشرط العام (٢) الشرط المادي (٣) الشرط غير الحقيقي (٤) الشرط المزدوج. أما النوع الأول وهو الشرط العام فإن كواين يقدم لنا المثال التالي: « إذا كان شيء ما حيواناً فقريباً، إذن فله قلب » هذا المثال عبارة عن مجموعة اشتراطات يصح التعبير عنها كما يلي:

« في كل قم × فإنه إذا كان × حيواناً فقارياً، إذن × له قلب ».

أما الشرط المادي، أو النوع الثاني الذي يشير إليه كواين، فهو ذلك النوع المألوف لدينا حيث يقوم بين قضيتين « إذا كان p إذن q »، أو بمعنى آخر $(p \supset q)$.

ويحاول كواين بعد ذلك أن يحدد النوع الثالث من الشرط وهو الذي يشير إليه بالشرط غير الحقيقي أي الذي يكون مقدمه كاذباً ونتيجته كاذبة^(١) مثل « إذا كان أيزنهاور قد جرى، لكان ترومان قد خسر ».

يوضح كواين أن معالجة مثل هذا النوع من الشرطيات يرتبط بالعلية والعلاقة النوعية بين مادة المقدم ومادة التالي؛ أو بمعنى آخر فإن هذا الموضوع أقرب إلى المنطق المادي منه إلى المنطق الرياضي؛ ولكنه في نفس الوقت يوضح مدى الخلط الذي تعاني منه فكرة الدالة الشرطية، ولذا يرى أن الفكرة لا تنتمي للمنطق البحت بقدر انتهائها لنظرية المعنى Theory of meaning أو ربما فلسفة العلوم (١).

وإنطلاقاً من فكرة الشرط العام والشرط غير الحقيقي التي حددها كواين، يمكن تمييز الشرط المادي عنها. فالشرط المادي كما يرى يقوم بذاته بين القضيتين ويقدم كواين الأمثلة التالية لتوضيح فكرته الأساسية:

المثال الأول: إذا كانت فرنسا في أوروبا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثاني: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثالث: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر عذباً.

الشرط في هذه الأمثلة الثلاثة لا معنى له، كما يرى كواين؛ لأن صورة الشرط الأساسية تؤسس علاقة بين وقائع لا رابطة بينها. أضف إلى هذا أنه إذا أردنا إثبات أن فرنسا تقع في أوروبا فليس هناك ما يدعو إلى استخدام اشتراطات بين قضايا نعلم صدقها وكذبها، لكن الشرط الحقيقي يقوم بين قضايا نحن لسنا متأكدون من صدقها أو كذبها كل على حدة.

أما النوع الرابع من الشرط فهو ما يسميه كواين بالشرط المزدوج، وهو عبارة عن شرط مادي مزدوج، حيث يكون على صورة وصل بين شرطين مثل:

$$(p \supset q) . (q \supset p)$$

وهو يعني « p إذا وإذا فقط q » وهذا النوع من الشرط يعبر عنه نسق برنكييا بالتكافؤ الآتي (p = q) أي أن :

$$p = q = (p \supset q) . (q \supset p)$$

ولهذا النوع من الشرط، كما نعلم، حالتان للصدق وحالتان للكذب.

حالتا الصدق:

١ - إذا كانت p صادقة، q صادقة.

٢ - إذا كانت p كاذبة، q كاذبة.

حالتا الكذب:

١ - إذا كانت p صادقة، q كاذبة.

٢ - إذا كانت p كاذبة، q صادقة.

وحين تناول كواين هذا النوع من الشرط حاول أن يثبت أن صيغة التكافؤ (=) زائدة - كما فعل في حالة الفصل والتضمن - وذلك عن طريق استخدام صيغة بديلة هي السلب والوصل، حيث بدلا من الصيغة (p = q) يمكن استخدام الصيغة البديلة (q ⊃ p) - (p ⊃ q) - .
لقد وجد كواين أن الأفكار والمفاهيم الجديدة التي لدمها يمكن أن تكون ذات فائدة عملية أكثر مما هو في الأنساق المنطقية الأخرى، فأضاف إلى هذه المفاهيم بعض التحليلات الجديدة، خاصة تلك التي تتعلق بقوائم الصدق، ثم حاول بعد ذلك أن يصحح بعض المفاهيم التي لدينا عن الإتساق والصحة المنطقية، ويمكن أن نتبين هذه التعديلات فيما يلي:

أولا - قوائم الصدق والتحليل

يشير كواين إلى أن منهج القدمات في تحليل الصيغ المنطقية يستند بالضرورة إلى استخدام قوائم الصدق ، وهذا ما نجده عن فتجنشتين ولو كاشيفتش ويوست وغيرهم ، حيث توضع الصيغة المنطقية في قائمة صدق ، وتوضع القيم تحت المتغيرات ، ثم نقوم بإيجاد العلاقات بين المتغيرات من خلال تطبيق معنى الثوابت المنطقية . لكن كواين يرى أن هذا المنهج يتطلب منا تحليل القائمة حتى نكتشف مواضع الكذب في الصيغة ، وهذا يعني بالضرورة أنه إذا كانت لدينا بعض الصيغ التي تحتوي على خمس متغيرات أو أكثر مثلاً ، فإن تحليلها يتطلب مزيداً من الدقة والجهد ، إلى جانب الخطأ الذي قد تقع فيه . الأمر الذي يتطلب منا البحث عن وسيلة مثلى للتحليل ، وهو ما يحاول كواين عرضه بصورة جديدة يختلف فيها مع المنطقة .

١ - يرى كواين أنه ليست بنا حاجة لاستخدام الرمز F, T للإشارة إلى مفهومي « صادق » و « كاذب » ، وإنما يمكننا فقط استخدام رمزي واحد في وضعين وهو الرمز T فإذا كان الرمز T في هذا الوضع ، فإنه يشير إلى « صادق » ، وإذا كان في هذا الوضع T فإنه يشير إلى « كاذب » :

٢ - لا يرى كواين ضرورة ملحة لتحليل الصيغة المنطقية بأسرها ، كما يفعل السابقون ، ولكنه يختار من بين المتغيرات التي لديه متغيراً ما ويفترض صدقه مرة وكذبه مرة أخرى ، ثم يستنتج النتائج المترتبة على ذلك . فإذا ما تبين أن المتغير الذي اختاره صادقاً ، افترض صدق أو كذب ثابت آخر ، وهكذا حتى يتوصل إلى القيم النهائية للدالة .

٣ - إذا كان لدينا الوصل (TTT) فإنه يمكن اختصاره إلى (TT) ثم إلى (T) فقط .

٤ - إذا كان لدينا الفصل (I V I V I) فإنه يمكن حذف (I) بصورة تدريجية من هذا الفصل حتى نصل إلى (I) .

٥ - إذا كان لدينا صيغة وصل تحوي I فإنه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .

٦ - إذا كان لدينا صيغة فصل تحوي I فإنه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .

٧ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها T فإننا نختصر هذا الشرط إلى التالي دون المقدم .

٨ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها I أو صيغة شرط تاليها T فإننا نختصره إلى T .

٩ - إذا كان لدينا صيغة شرط تاليها I فإنه يمكننا اختصار الدالة إلى نفي المقدم .

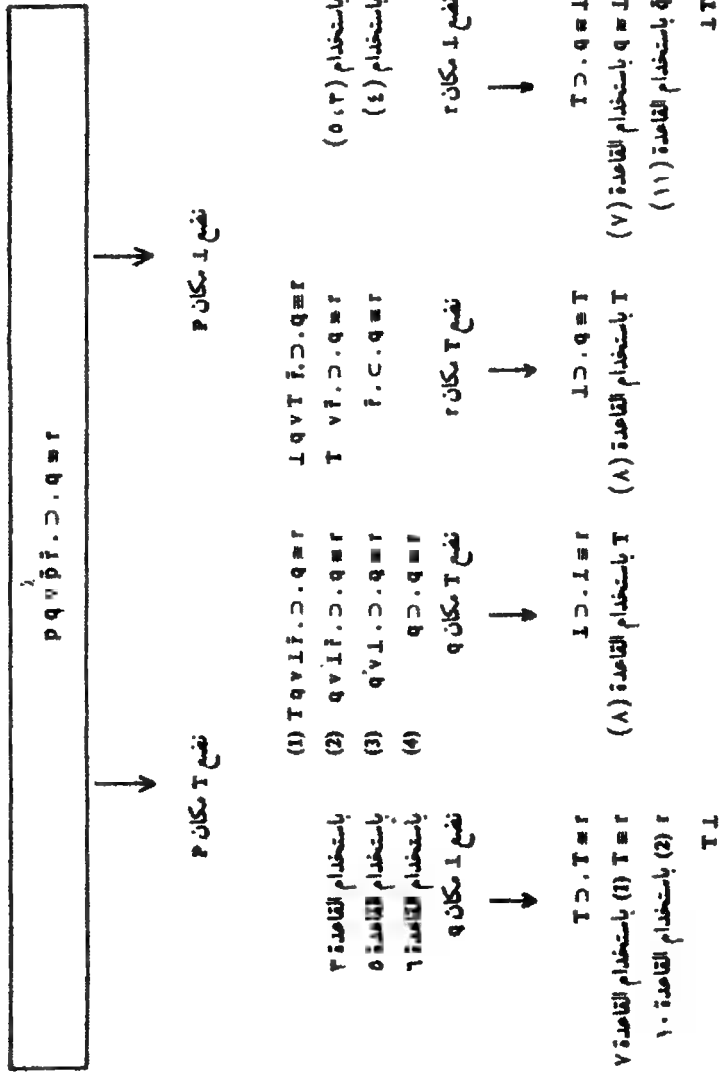
١٠ - إذا كان لدينا شرط مزدوج فإننا نختصر منه T ، وتصبح الصيغة $T \equiv T$ هي T ، وتصبح الصيغة $T \equiv T$ هي I .

١١ - نقوم بحذف I في الشرط المزدوج ونسلب الجزء الآخر حتى يمكن اختصار الدالة إلى هذا السلب .

إذن وفق هذا المنهج الجديد الذي يحدده كواين يمكننا إجراء التحليل على أي صيغة من الصيغ، وهذا ما يتضح لنا من تحليل الصيغة الآتية :

$$p \vee q \vee \bar{p} \bar{r} . \supset . q = r$$

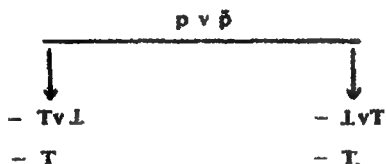
نبدأ بتحليل هذه الصيغة كما يلي :



على هذا النحو يكشف كواين عن مفهومه الجديد لتحليل الصيغ دون الاستعانة بقوائم الصدق. وبطبيعة الحال فإن فكرة كواين جديرة بالاعتبار خاصة إذا كانت لدينا متغيرات متعددة داخل الصيغة المطلوب تحليلها. هذا إلى جانب أن الفكرة في حد ذاتها تقتضي معالجات دقيقة من جانب المناطق للكشف عن التطورات التي يمكن أن تحدثها في هذا الجانب.

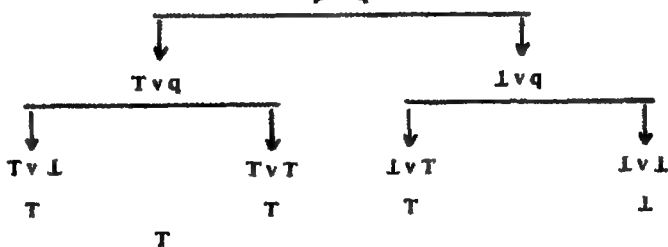
ثانياً: الاتساق والصحة المنطقية

لقد وجد كواين أن موضوعي الاتساق والصحة المنطقية للصيغ لا بد من معالجته بصورة منطقية أفضل من تلك المعالجة التي درج عليها المناطق، ولهذا فهو ينظر للصيغة الصحيحة منطقياً **Valid Schema** على أنها الصيغة التي تكون صادقة مهما صدقت أو كذبت المتغيرات التي بها. فعلى سبيل المثال الصيغة $p \vee \neg p$ تعد صحيحة منطقياً لأننا إذا أخذنا في تطبيق المنهج التحليلي لقيم الصدق حصلنا على النتيجة.



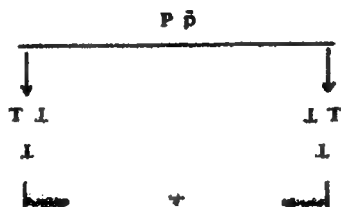
T (صادق في جميع الحالات)

أما الصيغة المتسقة منطقياً **Consistent Schema** فهي تلك الصيغة التي تصدق في بعض الحالات التي تكون عليها متغيراتها، ومثال هذه الصيغة $p \vee q$ التي يمكن تحليلها كما يلي:



في هذه الدالة نجد أن التحليل النهائي قد أفضى بنا إلى حالة كذب واحدة وثلاث حالات للصدق، ومن ثم تعتبر هذه الصيغة من الصيغ المتسقة.

كذلك يعالج كوايين الصيغ غير المتسقة *Inconsistent schema* التي تكذب في كل الحالات التي تكون عليها متغيراتها. ومن أمثلة الصيغ غير المتسقة الصيغة « $p \bar{p}$ » التي يمكن تحليلها كما يلي:



يتبين لنا من هذا التحليل أنه ليس ثمة حالات تصدق فيها مثل هذه الصيغة. على هذا النحو يكون كوايين قد عالج ثلاثة أنواع مستقلة من الصيغ هي:

(١) الصيغة الصحيحة منطقياً.

(٢) الصيغة المتسقة منطقياً.

(٣) الصيغة غير المتسقة منطقياً. ومن خلال المقارنات بين هذه الصيغ المختلفة يمكن لنا اثبات النتائج الآتية:

١ - أن الصيغة الصحيحة منطقياً هي في حد ذاتها نقيض الصيغة غير المتسقة منطقياً. والعكس صحيح. *الصيغة الصحيحة منطقياً هي نقيض الصيغة غير المتسقة منطقياً.* على حين أن الصيغة المتسقة منطقياً نقيضها صيغة غير متسقة منطقياً.

٢ - أن اختبار صحة أي دالة من الممكن أن يتوقف في أي مرحلة دون أن نصل إلى نهاية التحليل، وذلك بمجرد أن نحصل على نتيجة سلبية واحدة. فإذا حصلنا على تأليف من قيم المتغيرات نجد الصيغة فيه كاذبة (حالة كذب

الثابت الرئيسي فيها) فإن نتيجة التحليل تصبح سلبية.

٣ - أن الإجراء السابق ينسحب على عدم الإتساق، لأنه من الممكن أن نتوقف عن المضي في التحليل بمجرد الحصول على حالة واحدة تصدق فيها الصيغة.

٤ - في حالة اختبار الاتساق لا نصل إلى نتيجة سلبية قبل نهاية التحليل بأي حال من الأحوال، إلا أننا قد نتوقف عن التحليل عندما نحصل على حالتين على الأقل واحدة منها تصدق فيها الصيغة والأخرى تكذب فيها، ومن ثم فإن نتيجة التحليل تكون إيجابية ولا داعي للمضي حتى نهاية التحليل، وهذا ما نتيبته من الصيغة التالية:

$$\begin{array}{c}
 p \vee q, \bar{q} \wedge \bar{p} \supset q \equiv r \\
 \downarrow \\
 T q \vee \perp, \bar{p} \supset q \equiv r \\
 q \vee \perp \supset q \equiv r \\
 \downarrow \\
 T \vee \perp \supset T \supset r \\
 T \supset r \\
 r \\
 T \quad \perp
 \end{array}$$

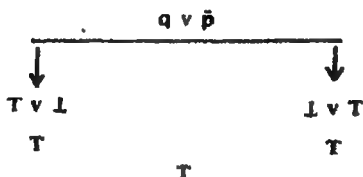
يتبين إذن من هذا التحليل أن الدالة متسقة وليس ثمة ضرورة للمضي في التحليل إلى ما هو أبعد من هذا.

٥ - تفيد الصيغ الصحيحة منطقياً في أنها تصدق في جميع الحالات المتعلقة بالمتغيرات التي تتكون منها، ولكن إذا فحصنا هذه الصيغ أو بعض أمثلتها لوجدناها مجرد تحصيل حاصل. على سبيل المثال الصيغة « $p \supset p$ » صيغة تحليلية وهي لا نقول لنا شيئاً وهو ما يمكن أن نتيبته من المثال المادي الآتي:

« إذا زحف الجنود إذن فقد زحف الجنود »

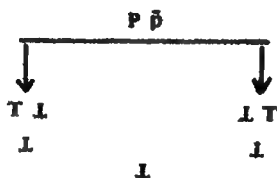
هذا المثال لا يوضح لنا حقيقة هل زحف الجنود أم لا ٩، ولهذا فإن كواين^(١) يقرر أن أهمية الصيغة الصحيحة منطقياً ليست في كونها نتيجة مطلوب التوصل إليها، وإنما في كونها وسيلة لاختصار قيم الصدق.

٦ - أنه يمكن لنا الاستفادة من الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة في اختصار عملية التحليل ذاتها على اعتبار أن الصيغة الصحيحة يمكن أن ترفع إذا كانت تشكل جزءاً من صيغة أخرى ويوضع بدلاً منها T . مثال ذلك:



من هذا التحليل يتضح أن الصيغة يمكن رفعها ووضع « T » بدلاً منها، فإذا قابلتنا هذه الصيغة كجزء من أي صيغة أخرى أمكن القيام بهذا الاجراء، وهذا هو جوهر الاختصار الذي يدعو له كواين.

كذلك للصيغة « $p \bar{p}$ » يمكن رفعها ووضع « T » بدلاً منها وهو ما يتبين من التحليل الآتي:



ويمكن اتباع هذا في أي صيغة غير متسقة. لكن الصيغة المتسقة لا يصح

فيها مثل هذا الإجراء. ولكن من أجل استكمال غاية التنظيم يمكن تحديد فئة الصيغ الصحيحة التي يمكن رفعها ووضع T مكانها، وهو ما نجده في الحالات الآتية:

- حالة الفصل بين أي متغيرات أو صيغ على أن يشتمل هذا الفصل على أي قضية ونقيضها، أو أي صيغة ونقيضها مثل:

$$p \vee q \vee r \vee s \vee \bar{p} \vee - (p \vee q) \quad , \quad \langle p \vee q \vee r \vee \bar{p} \rangle$$

- حالة الشرط أو الشرط المزدوج (التكافؤ) الذي نجد عنصريه متناظرين مثل:

$$s \bar{s} \equiv s \bar{s}'' , \quad "qr \equiv qr'' , \quad "qrvqs \cdot \supset \cdot qrvqs"$$

أما الصيغ غير المتسقة التي يمكن رفعها ووضع « \perp » بدلا منها، فإنه يمكن تحديدها أيضاً كما يلي:

- الوصل بين أي متغيرات أو قضية ونقيضها مثل:

$$p \vee q \cdot \cdot \vee \cdot p \vee s \cdot - (p \vee q) , \quad \langle pqr \bar{p} \rangle$$

- حالة الشرط المزدوج بين قضية أو صيغة ونقيضها مثل:

$$"qr \equiv - (qr)'' \quad \quad "p \equiv \bar{p}''$$

٧ - وهناك خاصية أخرى تتعلق بالصيغتين الصحيحتين وغير المتسقة فقط وهذه الخاصية هي ما يطلق عليه كواين^(١) صيغة استبدال حرف بصيغة Substitution of Schemata for letters، وهي تصدق في حالة الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة ولا تصدق في حالة الصيغ المتسقة. وهذه الخاصية تعني استبدال حرف من حروف (أي متغيرات) أي صيغة صحيحة أو

غير متسقة بأي صيغة كانت . ويمكن أن نحدد بعض الأمثلة التطبيقية على هذه الخاصية كما يلي :

- إذا قلنا أن الصيغة 'p v p' صيغة صحيحة فإنه يمكننا وضع 'q r' بدلا من 'p' فنتنتج لنا الصيغة الصحيحة الآتية :

$$q r v - (q r)$$

- إذا قلنا أن الصيغة 'p p' صيغة غير متسقة فإنه يمكننا وضع 'q v r' بدلا من 'p' فنتنتج لنا الصيغة غير المتسقة الآتية :

$$q v r - (q v r)$$

- أما في حالة الصيغ المتسقة فإن الأمر يختلف ، فإذا كانت لدينا الصيغة 'p p q' وهي صيغة متسقة ، وأردنا تطبيق عملية الاستبدال ووضع 'r r' مكان 'p' فإن الصيغة التي ستننتج لدينا هي :

$$r r p p q$$

وهي صيغة غير متسقة ، وهذا دليل على عدم انطباق قاعدة الاستبدال على الصيغ المتسقة .

أنواع على الأقل من الاستبدال ، وهي :-

النوع الأول : استبدال حرف بآخر . وقاعدة هذه الحالة تشترط أنه إذا غيرنا حرفا بحرف آخر فإن هذا لا يتم بالنسبة لحرف واحد في الصيغة ، وإنما يتم بالنسبة لكل الحروف المشابهة في الصيغة ذاتها ، مثال ذلك الصيغ الآتية :

$$p \supset q . q \supset r . \supset p \supset r$$

فإذا رفعنا الحرف 'p' ووضعنا بدلا منه 's' فإن هذا الإجراء لا بد وأن

يتم في الصيغة كلها ، فتصبح كما يلي :

"s d q . q d r . d s d r"

النوع الثاني : استبدال حروف بالصيغ . وهذا هو النوع الذي يعالجه كواين ويلاحظ فيه أن الاستبدال يصح بالنسبة للصيغ الصحيحة وغير المتسقة ، أما الصيغ المتسقة فلا يصح الاستبدال فيها ، ومرجع ذلك أن الصيغ الصحيحة وغير المتسقة تكون كذلك بموجب تعريف ثوابتها مهما تغيرت تأليف الصدق والكذب بالنسبة للمتغيرات أو الصيغ الجزئية التي تربط بها هذه الثوابت ، أما الصيغ المتسقة فهي مقيدة نسبياً بتأليفات قيم الصدق والكذب الخاصة بمتغيراتها .

النوع الثالث : استبدال الصيغ بصيغ . ولا يصح تطبيق هذا النوع كقاعدة عامة ، رغم وجود بعض الاستثناءات لذلك في حالة الصيغ المتكاملة منطقياً والتي يمكن أن نجري عليها عملية الاستبدال .

النوع الرابع : استبدال صيغ بالحروف . وهذا النوع يمد في حد ذاته أضعف أنواع الاستبدال ولا يمكن أن يؤخذ كقاعدة .

ثالثاً : التضمن

يرى كواين أن من أدق أهداف المنطق بحث فكرة التضمن وبيان كيف أن قضية ما تتضمن قضية أخرى . فإذا كانت لدينا القضية p والقضية q فإنه علينا أن نوضح كيف أن p تتضمن q . مثال ذلك القضية « الطلاب ليسوا أذكاء » تتضمن القضية « الطلاب ليسوا أذكاء ولا ناجحين » . يمكننا ترجمة كل قضية بصورة رمزية على النحو التالي :

p	نرمز لها بالرمز	الطلاب أذكاء
q	نرمز لها بالرمز	الطلاب ناجحون

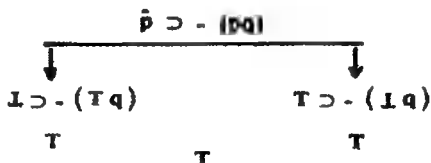
الطلاب ليسوا أذكياء • نرمز لها بالرمز \bar{p}

الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين نرمز لها بالرمز $-(pq)$ -

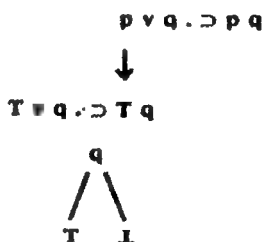
الصيغة الرمزية للتضمن هنا يمكن تحديدها كما يلي:

$$\bar{p} \supset -(pq)$$

نجد أن هذه الصيغة صحيحة، ومن ثم فهي صيغة تضمن. إذن فالتضمن يعني أنه لا تكون هناك ترجمة تبين الصدق والكذب لتغيرات الشرط حيث تكون الصيغة التي تمثل المقدم صادقة، والصيغة التي تمثل النتيجة كاذبة في نفس الوقت. وعلى هذا الأساس فإن كواين ينظر للتضمن على أنه الصحة المنطقية للشرط، ويمكن لنا اختبار هذه الفكرة عن طريق تحليل قيم الصدق كما يلي:



كذلك إذا أردنا أن نعرف ما إذا كانت الصيغة ' $p \vee q \supset pq$ ' هي صيغة شرط أو تضمن، نقوم بإجراء التحليل كما يلي:



ويتوقف التحليل إذا وجدنا حالة واحدة يكون فيها مقدم الشرط صادقاً ونالیه كاذباً. ونتيجة التحليل تبين لنا بوضوح تام أن الصيغة $p \supset q$ لا تتضمن الصيغة p, q .

ولكن نأتي الآن للسؤال الهام: هل يرى كواين أن ثمة قواعداً للتضمن؟ يرى كواين أن التضمن له قواعد محددة، وهذه القواعد يمكن تحديدها كما يلي:

القاعدة الأولى: أي صيغة تتضمن ذاتها. فإذا كانت الصيغة صادقة كان الشرط كما يلي $T \supset T$ ، والشرط في هذه الحالة صحيح. أما إذا كانت الصيغة غير صحيحة فإن صورة الشرط في حالة كذب الثابت الرئيسي في الصيغة $F \supset F$ ، والشرط في هذه الحالة صحيح أيضاً، وهذا يعني أن أي صيغة لا بد وأن تتضمن ذاتها.

القاعدة الثانية: إذا تضمنت صيغة صيغة أخرى، وتضمنت هذه الأخيرة صيغة ثالثة، فإن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثالثة.

القاعدة الثالثة: كل صيغة غير متسقة تتضمن كل الصيغ الممكنة سواء أكانت صحيحة أم متسقة أم غير متسقة، ولكن الصيغة غير المتسقة لا تتضمن إلا بواسطة صيغة غير متسقة.

القاعدة الرابعة: الصيغة الصحيحة لا تتضمن إلا الصيغة الصحيحة، ولكنها تتضمن بواسطة أي صيغة أخرى.

إلا أن كواين يرى أنه بالإضافة إلى هذه القواعد يمكن للرياضي أو المنطقي أن يعتمد على خياله ويستخدمه للتوصل إلى الصيغة أو الصيغ التي تنتج عن صيغة ما. فإذا كانت لدينا الصيغة $p \vee q$ فإنه يمكننا أن ندرك على الفور حالتين:

(أ) الصيغ 'p', 'q', 'q.p', $\bar{p} \supset q$ تتضمن هذه الصيغة .

(ب) الصيغ 'p ∨ q ∨ r', $\bar{p} \supset q$, تتضمنها الصيغة التي لدينا أيضاً .

ولكن يشترط الفهم الدقيق للمقدرة على اكتشاف مثل هذه الصيغ أكثر من أي شيء آخر . كذلك فإن هناك بعض الصيغ التي يتضح لنا من مجرد تأملها أنها لا تكون صحيحة إلا بترجمة واحدة لمتغيراتها ، وبقيّة تأليفاتها لا تحقق صحة الصيغة مثل الصيغة $\bar{p} \supset q$. هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا إذا كانت 'p' صادقة ، 'q' كاذبة . في فحص مثل هذه الصيغة ومحاولة معرفة ما إذا كان يلزم عنها صيغ أخرى أم لا ، نقوم بالإجراء التالي : نضع مكان كل متغير في الصيغة الثانية (أي الصيغة التي تتضمنها الصيغة المعطاة) قيمة الصدق أو الكذب الخاصة بنفس المتغير في الصيغة الأولى والتي تحقق الحالة الوحيدة المعطاة للصحة بالنسبة للصيغة الأولى ، ثم نطبق منهج تحليل قيم الصدق على الصيغة ، فإذا نتجت لدينا 'T' أو صيغة صحيحة فإن معنى هذا أن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثانية .

مثال : التضمن الآتي $p \supset q \supset r$, $\bar{p} \supset q$ implies , $\bar{p} \supset q$ مكان 'p' , $\bar{p} \supset q$ مكان 'q' فنحصل على النتيجة .

$$T \supset \bar{p} \supset q \supset r$$

وبتحليل هذه الصيغة نحصل على

$$T \supset \bar{p} \supset q \supset r$$

$$\bar{p} \supset q \supset r$$

$$T$$

ومعنى هذه النتيجة أن التضمن صحيح .

كذلك إذا كانت هناك بعض الصيغ التي يبدو لنا من مجرد ملاحظتها

أن الثابت الرئيسي يصدق في حالة واحدة فقط فإن هناك نوعاً آخرًا من الصيغ يتضح أنها تصبح كاذبة بترجمة واحدة فقط لمتغيراتها أما بقية التآليف الممكنة للتغيرات فتتحقق صدق الثابت الرئيسي. فالصيغة $(pq) -$ تكذب فقط إذا كان كل من $'p'$ ، q' صادقاً، أي T . كذلك إذا فحصنا الصيغة.

$$p \supset p . q \supset r \text{ implies } p \supset r$$

لوجدنا أن $p \supset r$ تكذب فقط إذا كانت $'p'$ هي $'T'$ ، $'r'$ هي $'I'$ ثم نقوم بوضع T مكان $'p'$ ، I مكان $'r'$ في الصيغة $p \supset r$ ، فينتج لدينا:

$$T \supset q . q \supset I$$

$$'q \bar{q}'$$

وهي صيغة غير متسقة مما يدل على أن التضمن المطلوب اثباته صحيح. إن التضمن كما يشير إليه كواين يعتبر كذلك من ناحية قيم الصدق أي بناء على الاعتبار المنطقية وحدها، ولذا فهو يميز بين التضمن Implication وعلاقة الشرط $'if... then'$ فالتضمن هو الصحة المنطقية لعلاقة الشرط بين صيغتين!



تلك هي آخر التطورات المنطقية التي لا زال البحث يدور حولها حتى يومنا هذا، وقد كشف مؤتمر سالزبورج الأخير الذي عقد في يوليو ١٩٨٣ عن استمرار المناطق وعلماء الرياضيات في بحث بعض الموضوعات الجزئية لتطوير البحث المنطقي الرياضي بصورة تتسق مع التفكير المنطقي الرياضي ذاته.

القسم الثاني

نظرية حساب القضايا في أنساق المنطق البولندي

الفصل الخامس

يان لوكاشيفتش ومقدمات النسق الاستنباطي لنظرية حساب القضايا

ركزت الدراسات المنطقية الحديثة، بصفة عامة، على دراسة المنطق الرياضي من خلال النسق الذي عرض في «مبادئ الرياضيات» للعلامة برتراند رسل وتوأمه الرياضي ألفرد نورث هوبتيد، وقد عرف ذلك النسق في أوساط المناطق وعلماء الرياضيات بنسق «برنكييا» Principia (١٩١٠ - ١٩١٣). وكان من الطبيعي أن تحتل دراسة هذا النسق صفحات وصفحات من نظرية المنطق لسهولة وبساطة النسق، من جهة، ولأصطناعه لغة رمزية دقيقة سهلت عملية الاتصال الفكري بين المناطق وعلماء الرياضيات من جهة أخرى. إلا أن هذه البساطة لم تمنع بحال من الأحوال المحاولات التي بذلها منطقة ورياضيون آخرون للتوصل لبناء أنساق بديلة تعتمد على أفكار منطقية أبسط من المعروضة في «البرنكييا»، الأمر الذي أشرنا إليه في القسم الأول.

وبهنا أن نقرر هنا أن اتجاه الدارسين لمناقشة واستعراض نسق «البرنكييا» أدى إلى نتيجتين سلبيتين وهما: الأولى، تمثلت في إهمال التطور الدقيق والهام الذي حدث فيما بين الحربين العالميتين وأوائل الخمسينات لدى المناطق البولنديين، ممن عملوا على تطوير أبحاث المنطق الرياضي، وأصطنعوا في كثير من الحالات رمزية مختلفة عن رمزية «البرنكييا»، ومن

أهم هؤلاء الأعلام وأشهرهم، «يان لوكاشيفتش»^(١)، و«بوخنسكي»، و«كوتربنسكي»، و«سلوسكي»، و«بوركوفسكي».

وتمثلت الثانية في إهمال الأبحاث والدراسات المنطقية عند العرب تحت تأثير الآراء القائلة بأن العرب لم يأتوا بجديد في المنطق، وأنهم في الغالب الأعم لم يضيفوا شيئاً جديداً للآراء المنطقية التي وفدت عبر حركة نقل التراث. وليس لهذا الرأي ما يبرره على مستوى الواقع الفكري للمنطق العربي، إذ تولى لنا أن نطلع على أبحاث منطقية عميقة ومتطورة، كشفت عن إبداع منطقي وفكري في هذا المجال، وقد تم تقديم ذلك في بحث آخر بصورة شبه متكاملة وربما أفضى هذا فيما بعد إلى كشوفات منطقية أبعد^(٢).

لقد عرضنا لنسق منطق الموجهات عند لوكاشيفتش، ذلك المنطقي، الذي يعتبر علماً بارزاً من أعلام المدرسة البولندية الحديثة، وكانت فكرة البحث في الموجهات من الأفكار الهامة داخل حلقات البحث المنطقي على الصعيد العالمي، وقد اصطنع رمزية دقيقة حلت بعض الإشكالات المنطقية في إطار منطق الموجهات بصفة عامة. وحين عرضنا لنسق الموجهات، استبعدنا فكرة البحث عن النسق الاستنباطي الذي يتنظم نظرية حساب القضايا، فلم تكن وقتئذٍ بصدد معالجة تلك النظرية، وأردنا في الوقت نفسه أن نفرّد لها مكاناً متميزاً لإبراز الإسهام البولندي الرائد في مجال فكرة النسق الاستنباطي بصورة عامة.

واستكمالاً لفكرتنا الرئيسية عن إسهامات المدرسة المنطقية في بولندا، اخترنا نموذجين اثنين لنعرض من خلالهما النسق الاستنباطي لنظرية حساب

(١) ترجم الدكتور عبد الحميد صيرة، نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق المصري الحديث، والذي يعد من الأعمال الرائدة للمنطقي البولندي يان لوكاشيفتش، وصدرت لترجمة عام ١٩٦١.

(٢) راجع بعض الآراء الهامة حول المنطق العربي في

Recher, N., The Development of Arabic Logic, Pittsburgh, 1964, PP. 222 FF.

القضايا، وكيفية إقامة النظرية بمجملها كنسق اكسيوماتيكي بحث. أما النموذج الأول فيتمثل في الأفكار التي قدمها لوكاشيفيتش لبناء النسق الاستنباطي. وأما النموذج الثاني، فيعرض لنا نسق سلويسكي - بوركوفسكي الذي يُعد من أحدث الأنساق المتكاملة التي صدرت عن المدرسة البولندية في العشرين عاماً الماضية.

وقد يكون من المناسب أن نشير إلى أن هذا النسق الأخير لا يعد بديلاً لنسق برنكييا، رغم أن سلويسكي وبوركوفسكي كانا قد اقترحا هذا النسق، ووجدوا فيه سهولة أكثر من نسق برنكييا. لكننا مع هذا سنظل أمام تساؤلات مفتوحة، وضعنا نسق برنكييا أمامها، وأهمها التساؤل عما إذا كان أي نسق منطقي جديد يسير في نفس اتجاه برنكييا؟ أم أن المناطق، والرياضيين على السواء، يصطنعون لأنساقهم درباً آخرأ غير المألوف في عالم برنكييا؟ وهل يمكن أن يعتبر من وجهة النظر هذه، النسق الذي ابتدعه سلويسكي وبوركوفسكي مفيداً من وجهة النظر المنطقية والرياضية؟ أم أن نسق البرنكييا سيظل على الأقل لأجيال وأجيال قادمة هو الرائد، ما لم يتطور تفكيرنا الرياضي والمنطقي على الأقل بصورة تكشف عنها تطورات واكتشافات منطقية جديدة؟.

إن كل هذه التساؤلات وغيرها، معروضة أمام العلماء منذ لا يقل عن نصف قرن من الزمان، وعلى كثرة وتعدد الأنساق المنطقية والرياضية المقترحة، لم ينجح علماء الرياضيات والمنطق في اصطناع بديل صحيح ونسقي إلا في أجزاء ضئيلة جداً من النظرية، ولم يكتب، حتى الآن لمحاولات الخروج على نسق برنكييا إلا نجاح محدود ولكي نتبين صحة هذا الرأي من عدمه لا بد من أن نتناول بالتحليل نسق لوكاشيفيتش أولاً، ثم نتجه بعد ذلك إلى معالجة نسق سلويسكي - بوركوفسكي مباشرة.

ناقشنا في الفصل الثاني منطق الموجهات عند لوكاشيفيتش، وظهرت أهمية ذلك التناول من خلال تتبعنا لفكرة التضمن في أنساق المنطق

المختلفة. وكما زعمنا في مقدمة هذا البحث، يعد الإسهام المنطقي الرائد للمدرسة البولندية ذا مكانة خاصة في تاريخ المنطق بصفة عامة، وعلى درجة كبيرة من الأهمية في تناول أنساق أخرى بديلة غير نسق «برنكييا» الذي فتن علماء الرياضيات والمنطق معاً. أضف إلى هذا أنه كان بمقدور الأبحاث، التي تشير بوضوح إلى دقة الأنساق البديلة، أن تكشف عن رمزية جديدة تعالج البراهين الرياضية - المنطقية بصورة دقيقة، وعلى درجة من الوضوح والإيجاز والبساطة في الوقت نفسه.

ويُعد النسق الذي صاغه المنطقي البولندي لوكاشيفتش من أهم الأنساق المنطقية المعاصرة التي ظهرت في فترة ما بين الحربين. ونحن هنا نحاول أن نميط اللثام عن هذا الوجه المنطقي للمدرسة البولندية لنقدم صورة نسقية للأفكار التي قدمها لوكاشيفتش والتي قد يبدو من المناسب أن نعرض لأفكارها ومقدماتها الأساسية، ونترك مهمة استعراض النسق متكاملًا لمنطق ونسق «سلويسكي - بوركوفسكي» الذي أقام صورة متكاملة للحساب.

الحدود الابتدائية وبديهيات حساب القضايا:

يستخدم نسق حساب القضايا عند لوكاشيفتش نوعين من الحدود الابتدائية هما:

- ١ - يرمز النسق لفكرة السلب Negation بالرمز N .
- ٢ - يرمز النسق للقضية الشرطية بالرمز C .

وينظر النسق لرمزي السلب والشرطية على أنهما الثوابت الابتدائية الرئيسية في ذلك النسق. بالإضافة إلى هذا يستخدم الحروف الصغيرة من الأبجدية اللاتينية كمتغيرات قضائية، أي كمتغيرات تأخذ قيمة لتصبح قضايا.

والتعبير الذي صورته NP هو نفي القضية P . والتعبير ككل نطلق عليه دالة Function، وهذه الدالة تتألف من الرابط N ، والحجة P .

ونلاحظ، كما في الأنساق المنطقية الأخرى، أن التعبيرين P ، NP قضيتين متناقضتين، وهما لا تصدقان معاً، بمعنى أنه إذا كانت القضية P صادقة فإن القضية NP يجب أن تكون كاذبة، والعكس.

ويقدم النسق فكرة جديدة، حيث نجده يشير إلى القضية الكاذبة بالرمز O ، ويشير إلى القضية الصادقة بالرمز 1 ، وبذا يصبح لدينا:

$$NO = 1, \quad N1 = O$$

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي: «نفي القضية الكاذبة قضية صادقة، ونفي القضية الصادقة قضية كاذبة».

والدالة Cpq قضية شرطية تعبر عن التضمن، وتقرأ «إذا p فإن q ». في هذه الصيغة نجد أن الرابط C الذي يشير إلى التضمن جاء في بداية الدالة، على خلاف ما هو مألوف في منطق البرنكييا. لقد فضل لوكاشيفتش أن تأتي الرموز الدالة على الثوابت في بداية الدالة، والسبب الذي جعله يفضل هذا الإجراء رغبته في التخلص من الأقواس.

إلا أنه ينبغي تسجيل موقف هام يقدمه لوكاشيفتش على صيغة التضمن السابقة Cpq . إن هذه الصيغة كما يرى لوكاشيفتش، وفقاً لكل الآراء المنطقية السابقة، تعبر عن القضية: «If p is then q is»، أي «إذا كانت p موجودة فإن q موجودة». لكن هذه الصيغة، كما يرى لوكاشيفتش^(١)، ليست صحيحة تماماً، والسبب في هذا أن الصيغة السابقة تكون ذات معنى فقط إذا عالجنا المتغيرات كحدود متغيرات. لكن التضمن Cpq لا توجد فيه إلا متغيرات قضائية.

وهنا نتساءل: ما هي، في رأي لوكاشيفتش، الحالات التي بموجبها تصبح Cpq صادقة أو كاذبة؟

Lukasiewicz, Jan., Elements of Mathematical Logic, Trans-by Olgierd Worzlasiewicz, Pergamon Press, London, 1963, P. 25.

إننا إذا استخدمنا الرمز 1 للإشارة إلى صادق، والرمز 0 للإشارة إلى كاذب، وبداناً نحلل الصيغة السابقة للتضمن سنجد أن لدينا الحالات الأربع التالية:

C00, C01, C10, C11

نلاحظ على الحالات السابقة ما يلي :

١ - أن الحالة $C10 = D$ ، حيث نجد هنا أن مقدم التضمن الصادق، وتاليه الكاذب، يؤدي إلى تضمن كاذب.

٢ - أن الحالة $C00 = 1$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب وتاليه كاذب، هو تضمن صادق.

٣ - أن الحالة $C01 = 1$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب، وتاليه صادق، هو تضمن صادق.

٤ - أن الحالة $C11 = 1$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه صادق، وتاليه صادق أيضاً، هو تضمن صادق.

لقد أراد لوكاشيفتش أن يحقق جهازاً استنباطياً دقيقاً للمنطق، وفقاً لأفكار دقيقة ومحددة، حيث يستند النسق ككل إلى بديهيات Axioms ومبرهنات Theorems يطلق عليها معاً المصطلح مقررات Theses، وهو مصطلح أخذ أصلاً من المنطقي البولندي ليسنسكي S. Lesniewski.

بديهيات نسق حساب القضايا:

يقدم النسق بديهيات ثلاثة رئيسية هي:

١ - $OpqOpqr$,

٢ - $OpNpp$,

٣ - $OpONpq$.

يلاحظ على البديهية الأولى أنها إحدى صور قانون القياس الشرطي الذي صاغه أرسطو، هذا القانون الذي قد يظهر على الصورة التالية أيضاً:

$$\underline{CKOpqGqrOpr}.$$

يلاحظ على الصورة التي لدينا أن الرمز K يرمز إلى الوصل، ومن ثم فإن الصيغة kpq تقرأ «p and q».

أما الصيغة الثانية لقانون القياس الشرطي فتقرأ:

$$\text{«إذا p فإن q، وإذا q فإن r، إذن إذا p فإن r»}.$$

وينبغي أن نلاحظ أن البديهية الأولى، السابق الإشارة إليها، يمكن أن تشتق من القانون الثاني للقياس الشرطي، بالإضافة إلى قانون التصدير الذي صورته:

$$\underline{CKKpqrOpGqr}.$$

وهناك نقطة هامة تتعلق بصورة هذا القانون، فهو يسمح لنا في حالة التضمن الذي في مقدمة وصل من قضيتين، أن ننقل إحداهما مكان التالي، مثال ذلك التضمن التالي:

«إذا كان x عدد صحيح و x قابل للقسمة على ٣، فإن x يقبل القسمة على ٦».

في هذا التضمن باستخدام قانون التصدير وقاعدة التعويض، بالإضافة إلى إثبات التالي نحصل على:

«إذا كان x عدد صحيح، فإن (إذا كانت x قابلة للقسمة على ٣، إذن x تقبل القسمة على ٦)».

وعن طريق هذه الصورة نستطيع أن نتوصل إلى البديهية الأولى عن

طريق افتراض الصورة الثانية من قانون القياس الشرطي. فإذا وضعنا في الصيغة السابقة cpq بدلاً من p ، cqr بدلاً من q ، cpr بدلاً من r ، فإننا نحصل على الصيغة التالية:

$$\underline{CCpCqrCqrCprCCpqCQqrCpr}.$$

وينفس الطريقة يمكن أن نصل إلى صورة القانون الثاني للقياس الشرطي، ولكن عن طريق قانون الاستيراد الذي صورته:

$$CCpCqrOKpqr.$$

أما البديهية الثالثة والتي صورتها $cpcnpq$ فإذا وضعنا 1 بدلاً من p فإننا نحصل على:

$$c1c n1q$$

وعن طريق قاعدة الإثبات بالفصل نحصل على:

$$cn1q$$

$$n0 = 1$$
 ولما كانت

إذن ينتج لدينا

$$c0q$$

معنى هذا أن البديهية ٣ تقرر تضمناً مقدمه كاذب وتاليه غير محدد.

وكما يلاحظ لوكاشيفتش^(١) فإن البديهية ٣ يمكن اشتقاقها من قانون التصدير إذا ما أضفنا إليها مبرهنة أخرى، وقد كانت هذه الصورة مألوفة لدى دونس سكوتس Duns Scotus أحد أعلام الفلاسفة في أواخر القرن الثالث عشر وأوائل القرن الرابع عشر الميلادي. لقد أكد سكوتس أنه إذا كانت القضيتان المتناقضتان صادقتين معاً، فإن كل شيء سيصبح ممكناً،

والسبب في ذلك أنه ليس من الممكن أن تصدق المتناقضتين معاً. والمبرهنة التي قدمها سكوتس في هذه الحالة صورتها:

OKpNpq.

لكننا نتساءل: هل يأخذ نسق لوكاشيفتش في الاعتبار بتعريفات وقواعد للاستدلال محددة؟ أم أنه يعتمد في نسقه على الأفكار السابق طرحها في الأنساق الأخرى، خاصة نسق برنكييا؟.

من الواضح أن نقطة البداية عند لوكاشيفتش مختلفة إلى حد كبير، فالنسق الذي بين أيدينا جديد في كل ما يطرحه من أفكار، وهو أيضاً يعتمد على تقديم أفكار جديدة ودقيقة بالإشارة إلى الأنساق الأخرى.

التعريفات وقواعد الاستدلال:

يشير النسق إلى أمرين هما:

١ - الحدود الابتدائية **Primitive terms**.

٢ - الحدود المعرفة **Defined terms**.

لكن لوكاشيفتش يفضل أن يزودنا في البداية بنظرية للتعريف حتى يميز بين الأشياء، ولا يختلط المَعْرُف بالمَعْرُف. وهو يناقش المسألة من خلال مثال بسيط ودقيق معاً، خذ تعريف المربع مثلاً:

المربع = شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية.

نلاحظ على التعريف السابق علامة (=)، ونلاحظ أيضاً أن كلمة مربع جاءت على يمين العلامة (=)، وأن التعريف شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية، ورد على يسار العلامة (=). ومن هذا التعريف نجد أن الطرف الأيمن له نفس معنى الطرف الأيسر. إن الطرف الأيسر الذي يقول

شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية هو المعروف *definiens*، وسنرمز له اختصاراً بالرمز (ds). أما الطرف الأيمن (مربع) فهو ما هو معرف *definiendum* أي موضوع التعريف، وسنرمز له اختصاراً بالرمز (dm). إن ما هو معرف (dm)، وفق رأي لوكاشيفتش، لم يكن شاملاً قبل إدخال التعريف عليه. ولهذا السبب فإن معنى (dm) يوضع أو يشرح أو يفسر فقط بالمعرف (ds).

وواقع الأمر أن المعروف (ds) لا بد وأن يكون شاملاً وجامعاً حتى قبل إدخال التعريف، وهذا في ذاته يبين ويرهن استحالة تعريف كل حدود النظرية، وضرورة تبني بعض الحدود الابتدائية.

إلا أن لوكاشيفتش يرى أن هناك خاصية هامة وضرورية ينبغي إضافتها إلى ما سبق تقريره. فإذا كان ما هو معرف (dm) وارد في جملة صادقة، إذن فإن الجملة التي نحصل عليها من الأولى عن طريق إحلال ما هو معرف (dm) بمعرف (ds) دقيق ينبغي أن يبقى صادقة. على سبيل المثال إذا ورد المعروف (ds) في قضية صحيحة إذن فإن استبدال المعروف (ds) بالمعرف (dm) بدقة يجب أن يؤدي إلى قضية صادقة.

إن آراء لوكاشيفتش حول التعريف، لا شك كانت معلومة ومعروفة جيداً في المنطق التقليدي. وقد فطن إليها المنطق الرياضي منذ بداية الأمر، وكذا تنبه إليها رسل وهوايتهد وهما بصدد وضع النسق المتكامل للبرنكييا. لكننا على أية حال نرى أن للتعريف أهمية كبيرة في نظرية حساب القضايا والنسق الاستنباطي ككل، ونقرر أن الميزة الكبرى للتعريف، بالإضافة إلى كونه يلعب دوراً هاماً وأساسياً في عملية الاستدلال، تكمن في أمرين: الأول، أن التعريفات تستخدم كاختصارات لتعبيرات معينة تنتمي إلى نظرية معينة معطاة لنا. والثاني، إننا حين نقدم مصطلحاً جديداً للتعريف فإن هذا المصطلح قد يسهم في تأسيس النظرية بصورة حدسية، ومن ثم يضيف إلى

الحدود التي تنتمي للنظرية موضوع التسؤل حدوداً جديدة ذات معنى^(١).

أما الأمر الغريب فإنه يبدو في رأي لوكاشيفتش^(٢) بأن رسل وهوايتهد في البرنكييا نظرا للتعريفات على أنها زائدة من الناحية النظرية. ولسنا نرى لهذا الرأي أي مبرر، إذ أن نسق برنكييا على خلاف ما يعتقد لوكاشيفتش. لقد قرر رسل وهوايتهد منذ البداية، أنهما يريدان أن يحققا للمنطق والرياضيات أيضاً أعلى درجة ممكنة من الصورية، وهذا لن يتسنى بطبيعة الحال إلا إذا نظر للتعريفات على أنها تأخذ الصورة الرمزية البحتة. والدليل على ذلك أنهما تخلصا من اللغة النظرية البحتة في متن النظريات، بعد أن انتهت مقدمة الكتاب. أضف إلى هذا أن نسق البرنكييا قدم لنا مجموعة من التعريفات الهامة في النظريات التي تناولها النسق^(٣).

لا زال السؤال الذي يعيننا الآن هو: هل قدم لوكاشيفتش ضمن جهازه الرمزي تعريفات يمكن أن يبدأ منها النسق، أم لا؟.

يقدم لوكاشيفتش في نسقه مجموعة من التعريفات الأساسية التي ينظر إليها على أنها موضوعة في صورة رمزية كاملة، وهو يضع لنا هذه التعريفات مستفيداً من كل الأفكار التي سبق أن قدمها عن الصدق والكذب، والرابط، وغيرها.

١ - تعريف رابط الفصل:

إن أول تعريف يقدمه لوكاشيفتش هو تعريف رابط الفصل A، والذي يضعه لناظر (or) في الانجليزية، و(أو) في العربية، تلك الرابطة التي تدل

Curry, H. B., «First Properties of Functionality in Logical Expressions», J. of, Symbolic (١) Logic, Vol. 2 (1937), PP. 2.

Ibid, P. 32.

(٢)

(٣) راجع كتابنا: فلسفة العلوم: المنطق الرياضي، ج ٣، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٨٥، ص ٨١ - ص ٨٧، ص ١٠٧، ص ١٦٩ - ص ١٧١، ص ١٩٨، ص ٢٠١، ص ٢٠٢، ص ٢١٨.

على البدائل. وينظر لوكاشيفتش إلى هذا الرابط على أنه العامل الأساسي في تكوين القضايا. ويقرر بذلك أن التعبيرين الآتين لهما نفس المعنى:

Apq ، cnpq ، ومن ثم فإن:

$$Apq = cnpq$$

ولهذا التعريف عند لوكاشيفتش، إذا استعنا بقيمتي صادق وكاذب، أربع حالات:

$$A00 = ON00 = C10 = 0 ,$$

$$A01 = ON01 = C11 = 1 ,$$

$$A10 = CN10 = C00 = 1 ,$$

$$A11 = CN11 = C01 = 1 .$$

ومن هذه الحالات الأربع نشق قانون رابط الفصل على النحو التالي:

الدالة Apq تكون كاذبة فقط إذا كان المقدم والتالي فيها كاذبين معاً، وتصدق في الحالات الأخرى.

٢ - تعريف رابط الوصل:

يستخدم لوكاشيفتش من نسقه الرابط k ليناظر كلمة (and) في الانجليزية، وكلمة (و) في العربية، تلك الكلمة المستخدمة في لغة الحياة اليومية للتعبير عن الوصل. ويضع التعريف التالي لرابط الوصل.

$$kpq = ncpnq$$

نلاحظ على الصيغة التي لدينا أن التعريف الذي وضعه للوصل هو سلب التعبير cnpq، وصدق هذا التعبير يستبعد إمكانية صدق p ، q معاً. وطالما أن الدالة kpq هي سلب أو نفي التعبير cnpq فإنها تكون صادقة فحسب إذا كانت الجملة (p and q) لا تستبعد إحداها الأخرى، ولكنهما صادقتان معاً. وبذا فإن التعريف السابق يؤدي إلى الحالات الأربع التالية:

$$\begin{aligned}
K00 &= NO0N0 = NO01 = N1 = 0, \\
K01 &= NO0N1 = NO00 = N1 = 0, \\
K10 &= NC1N0 = NC11 = N1 = 0, \\
K11 &= NC1N1 = NC10 = N0 = 1.
\end{aligned}$$

من هذه الحالات الأربع يمكن لنا أن نستنتج قانون رابط الوصل على الصورة التالية: الدالة kpq تكون صادقة فقط إذا كان كلا من المقدم والتالي صادقين، وتكذب في بقية الحالات الأخرى.

٣ - تعريف رابط اللا - وصل:

يقدم لنا لوكاشيفتش في نسقه الرابط الجديد D الذي يرمز به إلى اللا - وصل، أو البديل النافي. وهذا الرابط لا نجد له مقابل في الأنساق الأخرى، ولا هو يماثل، أو يناظر أيضاً، كلمة محددة في اللغة الانجليزية. ويقدم لنا التعريف التالي:

$$Dpq = cpnq$$

ومن هذا التعريف نتوصل إلى الحالات الأربع التالية:

$$\begin{aligned}
D00 &= C0N0 = C01 = 1, \\
D01 &= C0N1 = C00 = 1, \\
D10 &= C1N0 = C11 = 1, \\
D11 &= C1N1 = C10 = 0.
\end{aligned}$$

ومن هذه الحالات الأربع نشق القانون التالي: الدالة Dpq تكون كاذبة فقط إذا كان كل من المقدم والتالي صادقين، وفيما عدا ذلك من الحالات فإنها تكذب.

٥ - تعريف رابط التكافؤ:

يرمز لوكاشيفتش للتكافؤ بالرمز E ، ويقدم لنا التعريف التالي:

$$Epq = nccpqncqp$$

والتعبير E_{pq} يقرأ «إذا وفقط إذا q ». ومن التعريف السابق نحصل على الحالات الأربع التالية:

$$\begin{aligned} E_{00} &= NCC00NC00 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1, \\ E_{01} &= NCC01NC10 = NC1N0 = NC11 = N1 = 0, \\ E_{10} &= NCC10NC01 = NC0N1 = NC00 = N1 = 0, \\ E_{11} &= NCC11NC01 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1. \end{aligned}$$

من هذه الحالات الأربع نشق التعريف التالي:

الدالة E_{pq} تكون صادقة فقط إذا كانت p ، q صادقتين معاً أو كاذبتين معاً. أما إذا كانت إحداهما صادقة والأخرى كاذبة فإن الدالة فكرة كاذبة.

تلك هي الأفكار الرئيسية التي يقدمها لنا المنطقي البولندي «يان لوكاشيفتش» والتي على أساسها يقيم النسق المتكامل لنظرية المنطق. ولما كان منطق الموجهات عند لوكاشيفتش الذي قدمنا عرضاً له في «المنطق الرياضي: التطور المعاصر» قدم صورة برهانية لكيفية انتقال النسق عند «لوكاشيفتش» للبرهنة ابتداءً من مقدمات النسق، فقد رأينا أن نكتفي باستعراض أسس نظرية حساب القضايا في نسقه، على أن نقدم صورة نموذجية متكاملة للحساب عند «سلوسكي - بوركوفسكي» في النسق الذي سنعرض له توطأً.

الفصل السادس

سلوبسكي - بوركوفسكي والنسق المتكامل لنظرية حساب القضايا

الرمزية والهيغ في نسق سلوبسكي - بوركوفسكي:

يستخدم نسق سلوبسكي - بوركوفسكي نوعين من الرموز:

١ - رموز يشير بها إلى المتغيرات القضائية^(١) Sentential Variables

$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$

وهذه الرموز تتفق مع الرمزية المستخدمة في برنكييا ماتيماتيكاء، إلا أن رمّل وهو يتهد لم يستخدم في نسق البرنكييا p_1, q_1, r_1, \dots وتشير هذه المتغيرات إلى قضايا، أو جمل sentences توصف بأنها إما صادقة true أو كاذبة False.

٢ - الثوابت Constants وهي تمثل الروابط التي تقوم بين المتغيرات القضائية لتشكيل صيغاً مركبة، وهذه الثوابت هي:

أ - ثابت النفي negation ويرمز له بالرمز \neg ، ويصبح التعبير « $\neg p$ » معبراً عن نفي القضية p . ويقرأ $\neg p$ أو «ليس من الصادق أن p ».

ب - ثابت الوصل Conjunction ويرمز له بالرمز \wedge ، الذي يعبر عن الضرب المنطقي في الصيغة المركبة « $p \wedge q$ » التي تقرأ « p و q ».

(١) يفضل منطقة المدرسة البولندية بصفة عامة استخدام مصطلح Sentential Variables بدلاً من مصطلح البرنكييا Propositional Variables.

جـ - ثابت الفصل disjunction ورمزه \vee ، والذي يعبر عن الجمع المنطقي في الصيغة المركبة « $p \vee q$ » التي تقرأ « p أو q » .

د - ثابت التضمن implication ورمزه \rightarrow ، حيث الصيغة المركبة « $p \rightarrow q$ » تقرأ «إذا p فإن q » .

هـ - ثابت التكافؤ equivalence ورمزه \equiv ، حيث الصيغة المركبة « $p \equiv q$ » تقرأ « p إذا وإذا فقط q » .

تعبّر هذه الثوابت عن المفهومات الأولية للعمليات المنطقية التي سيعمل من خلالها نسق سلويسكي - بوركوفسكي ، حيث نلاحظ عليها ملاحظتين أساسيتين لا بد من تسجيلهما وهما :

أولاً : أن ثابت النفي المستخدم في هذا النسق يختلف عن الأنساق الأخرى . لقد استخدم راسل وهوايتهد الثابت \sim في نظرية حساب القضايا ، واستخدم لويس في كتاباته المختلفة ^(١) الثابت $(-)$ للتعبير عن النفي أو السلب ، والملاحظ أيضاً أن هلبرت ^(٢) استخدم من قبل نفس الثابت للتعبير عن السلب . أما لوكاشيفتش فقد فضل أن يخرج من نطاق هذه الرمزية الدارجة ويستخدم حرف الأبجدية N ليعبر به عن السلب .

ثانياً : أن استخدام سلويسكي - بوركوفسكي لثابت التضمن \rightarrow لم يكن الأول من نوعه ، فقد استخدم هلبرت نفس الثابت من قبل . أما لويس فيختلف استخدام ثابت التضمن الدقيق عنده \supset عن ثابت التضمن عند سلويسكي - بوركوفسكي .

(١) راجع في ذلك :

Lewis, C.I., *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, 1918.

Lewis, C.I. and C.H. Langford., *Symbolic Logic*, New York, 1932.

(٢) راجع ما كتبناه عن هلبرت في : المنطق الرياضي « مرجع سابق » ص ٢٧٣ - ص ٢٨١ .

ومن الواضح أن استخدام الروابط ٨ ، ٧ ، \rightarrow ، \equiv ، في نسق سلويسكي - بوركوفسكي يشير إلى قضايا مركبة جديدة، تماماً كما هو الحال في نسق برنكييا.

كذلك لا يستخدم النسق الذي بين أيدينا الأقواس، لقد استبعدها تماماً حتى لا يحدث أي خلط بين الصيغ. ومن جانب آخر نجد أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي يحدد الصيغ القضائية التالية:

١ - أن المتغيرات القضائية هي في حد ذاتها صيغ قضائية.

٢ - إذا كانت \emptyset وكذلك φ صيغاً قضائية إذن فإن:

$$\varphi \equiv \emptyset \text{ و } \varphi \rightarrow \emptyset \text{ و } \varphi \vee \emptyset \text{ و } \varphi \wedge \emptyset \text{ و } \emptyset \neg \varphi$$

هي في حد ذاتها صيغ قضائية.

٣ - كل صيغة قضائية في حساب القضايا إما إنها متغير قضائي أو أنها مؤلفة من متغيرات قضائية بموجب القاعدة السابقة.

لقد استبقى هذا النسق الحروف اليونانية \emptyset ، φ ، χ كمتغيرات تشير إلى الأسماء في نظرية حساب القضايا، كما هو الحال في نسق البرنكييا.

القواعد الابتدائية:

يشير المؤلفان إلى أن نسق حساب القضايا ككل يمكن نأسة من خلال منهجين هما:

١ - منهج أو طريقة الافتراضات Method of Assumptions.

٢ - المنهج أو الطريقة الأكسيوماتيكية Axiomatic Method.

أما المنهج الأول وهو منهج الافتراضات فلم يدعى المؤلفان الفضل في ابتكاره، وهما يشيران إلى أن ياسكوفسكي Jaskowski وجنتيزن Gentzen بدءا وطوراه فيما بين الأعوام ١٩٣٤ ، ١٩٣٥ ؛ إلا أنهما يشيران

في نفس الوقت إلى اختلافات شديدة بين المفهومين، وقد عرض بوركوفسكي وسلويسكي في عام ١٩٥٨ لاقتراح منهج الافتراضات في ورقة قدماها بعنوان: نسق منطقي يستند إلى قواعد مع تطبيق على تعليم المنطق الرياضي - وقد جاء هذا العرض في مجلة الدراسات المنطقية Studia Logica العدد السابع، ثم طوروا البحث في هذا الجانب فيما بعد في كتابهما عن عناصر المنطق الرياضي حيث عرضا لمجموعة من القواعد الابتدائية الداخلة في حساب القضايا مباشرة وهي:

١ - قاعدة الفصل The rule of detachment، ويرمز لها بالنسق بالرمز RD وهذه القاعدة تقر:

$$\text{RD} \quad \frac{\varnothing \rightarrow \varphi}{\varnothing} \varphi$$

ويجب أن نلاحظ أن هذه القاعدة تطلق على قاعدتين معاً وهما:

(١) قاعدة التصويض Substitution، (٢) قاعدة الإثبات Modus Ponens، وقاعدة detachment تختلف عن قاعدة الفصل التي سيرد ذكرها فيما بعد.

٢ - قاعدة ربط الوصل The rule of Joining a Conjunction، ويرمز لها بالنسق بالرمز RC، وهي تقر:

$$\text{RC} \quad \frac{\varnothing}{\varphi} \varnothing \wedge \varphi$$

ويجري تطبيق هذه القاعدة على النحو التالي:

$$\frac{a < X \quad X < b}{a < X \wedge X < b}$$

أو بصيغة أخرى:

$$a < x < b$$

٣ - قاعدة حذف الوصل The rule of Omitting a Conjunction، ويرمز لها

النسق بالرمز OC، وتقرر:

$$\text{OC} \quad \frac{\emptyset \wedge \psi}{\emptyset_1} \quad \frac{\emptyset \wedge \psi}{\psi.}$$

بمعنى أنه إذا كان الوصل محتوي في البرهان، فإن أي عنصر من عناصر الوصل ينطبق عليه البرهان ذاته. ولهذه القاعدة صياغات أخرى منها:

$$\frac{\emptyset \wedge \psi}{\emptyset} \\ \psi$$

وبصورة أكثر عمومية:

$$\frac{\begin{array}{c} \emptyset_1 \\ \vdots \\ \emptyset_n \end{array}}{\psi_1} \\ \vdots \\ \psi_k$$

حيث إذا كانت الصيغة \emptyset_n و... و \emptyset_1 محتواه في البرهان، فإن الصيغ ψ_k و... و ψ_1 تلحق بذات البرهان وينطبق عليها، مثال ذلك:

$$\frac{a < x \wedge x < b}{a < x} \quad (\text{or: } a < \blacksquare < b) \quad \frac{a < x \wedge x < b}{x < b.}$$

٤ - قاعدة ربط الفصل The rule of Joining a disjunction التي يرمز لها

النسق بالرمز JD، وتقرر:

$$ID \quad \frac{\emptyset}{\emptyset \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\emptyset \vee \psi}$$

تقرر هذه القاعدة أن الفصل قد يلحق بالبرهان إذا كان أحد عناصره محتوي في البرهان فعلاً. ومثال هذه القاعدة:

$$\frac{a > 0}{a > 0 \vee a = 0} \quad (\text{or: } a \geq 0) \quad \frac{a = 0}{a > 0 \vee a = 0}.$$

■ - قاعدة حذف الفصل The rule of Omitting a disjunction ويرمز لها النسق بالرمز OD، وتقرر:

$$OD \quad \frac{\emptyset \vee \psi}{\frac{\boxed{\emptyset}}{\psi}}$$

تقرر هذه القاعدة إنه إذا كان الوصل ونفى أحد عناصره محتوي في البرهان، فإنه العنصر الآخر للفصل يلحق بالبرهان ويطبق عليه. خذ المثال التالي على الاستدلال بواسطة هذه القاعدة:

$$\frac{a > \blacksquare \vee a = 0}{\frac{\boxed{a > 0}}{\blacksquare = 0.}}$$

٦ - قاعدة ربط التكافؤ The rule of joining an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز JE، وتقرر أن:

$$JE \quad \frac{\emptyset \rightarrow \psi}{\frac{\psi \rightarrow \emptyset}{\emptyset \equiv \psi}}$$

تقرر هذه القاعدة أن التكافؤ $\emptyset \equiv \psi$ قد يلحق بالبرهان إذا كان البرهان محتويًا على التضمن $\emptyset \rightarrow \psi$ والتضمن العكس $\psi \rightarrow \emptyset$.

٧ - قاعدة حذف التكافؤ The rule of omitting an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز OE، وتقرر هذه القاعدة أن:

OE

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\emptyset \rightarrow \varphi},$$

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\varphi \rightarrow \emptyset}.$$

حيث إذا كان أي تكافؤ ينتمي إلى البرهان إذاً فعلينا أن نلتحق بالبرهان التضمن الذي مقدمه العنصر الأول من عناصر التكافؤ وناليه العنصر الثاني، والتضمن الذي يكون عكس الأول. وفي هذه الحالة يسمى التضمن الأول تضمناً بسيطاً.

لكن ينبغي علينا أن نتساءل عن مصدر القواعد التي حددها المنطقيان سلويسكي وبوركوفسكي. هل ابتكرا القواعد السابقة؟ أم أنها وجدت لدى مناطق أخرى في أوقات سابقة؟ إذا كانت هذه القواعد موجودة من قبل، هل استخدمت بنفس الصورة؟ أم أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي أول ما استفاد من وضع هذه القواعد؟ علينا إذن أن نبحث هذا الجانب التطويري المنطقي.

المقررات والقواعد المشتقة:

يجدر بنا أن نثبت هنا بصورة سريعة ومختصرة ما سبق أن ذكرنا حول القواعد السبعة السابقة. أول هذه القواعد تلك التي تعبر عن التعويض والإثبات معاً ورمزنا لها بالرمز RD، ثم ربط الوصل RC، وحذف الوصل هي OC، وربط الفصل JD، وحذف الفصل OD، وربط التكافؤ JE، وحذف التكافؤ OE.

يركز نسق سلويسكي - بوركوفسكي على إعمال منطقي جيد ودقيق لقاعدة حذف الوصل OC كقاعدة مشتقة لبناء البرهان ابتداءً من الافتراضات، ويستخدم بالإضافة إلى هذا القواعد المنطقية الأخرى. ومن ثم نتساءل كيف يقدم لنا سلويسكي - بوركوفسكي في نسقهما الجديد طريقة جديدة بسيطة للبرهان، تعتمد على القواعد السابق تحديدها؟ وهل يبرهن النسق على قوانين أو نظريات قديمة مألوفة، بصورة جديدة تقرب للذهن صورة القانون أو

النظرية موضع البرهان؟ هذا ما يتعين علينا أن ننظر فيه الآن من خلال براهين النسق المتعددة على القوانين الهامة.

١ - يبرهن النسق على القانون الثاني للقياس الشرطي والذي صورته:

$$T1. \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

البرهان

$$\begin{array}{ll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & q \rightarrow r \\ (3) & \blacksquare \\ (4) & q \quad \{RD: 1, 3\} \\ & r \quad \{RD: 2, 4\} \end{array}$$

نلاحظ أن الرمز T هنا يرمز إلى كلمة مقرة Thesis، ونلاحظ أيضاً أن البرهان يطبق القواعد مباشرة.

٢ - يبرهن على قانون التصدير والذي صورته:

$$T2 \quad (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

كان المنطقي الإيطالي جيوسيب بيانو Peano أول من حدد صورة مبدأ التصدير في كتابه Formulaire de Mathematique، وقد عرض رسل Russell لهذا المبدأ في «أصول الرياضيات» Principes of Mathematics (١٩٠٣)، ثم في «مبادئ الرياضيات» Principia Mathematica (١٩١٠ - ١٩١٣)، ثم في كتابه «مقدمة للفلسفة الرياضية» (١٩١٩). وفي القضية ٣,٣ حدد رسل - هوايتهد صورة مبدأ التصدير في «برنكييا» بالصيغة:

$$3.3 \quad [(p \cdot q) \supset r] \supset [p \supset (q \supset r)]$$

نلاحظ إذن التشابه بين صورتني T2، 3.3 مع اختلاف الرموز المستخدمة ويبرهن النسق الجديد على هذه المقرة كما يلي:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & p \wedge q \rightarrow r \\
 (2) & p \\
 (3) & q \\
 (4) & p \wedge q \\
 & r
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}} \right\} \quad (a.)$$

$$\begin{array}{l}
 \{ JC: 2, 3 \} \\
 \{ RD: 1, 4 \}
 \end{array}$$

٣- والصورة الأخرى المرتبطة بقانون التصدير T2، قانون الاستيراد الذي سبق أيضاً أن حددته بيانو وبرهن عليه نسق برنكييا. لكن نسق سلويسكي - بوركوفسكي ينظر لقانوني التصدير والاستيراد على أنهما مترابطان، بمعنى أن القانون الثاني (الاستيراد) يعتبر حالة من حالات القانون الأول.

$$T2a. \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

البرهان

$$\begin{array}{ll}
 (1) & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
 (2) & p \\
 (3) & q \\
 (4) & q \rightarrow r \\
 & r
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}} \right\} \quad (a)$$

$$\begin{array}{l}
 \{ RD: 1, 2 \} \\
 \{ RD: 4, 3 \}
 \end{array}$$

والصورة الأخرى التي يقدمها النسق لهذه المقررة هي :

$$T2b. \quad p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r).$$

البرهان

$$\begin{array}{ll}
 (1) & (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \\
 (2) & [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r) \\
 & p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \{ T2 \} \\
 \{ T2a \} \\
 \{ JE: 1, 2 \}
 \end{array}$$

يعتبر هذا البرهان صورة مباشرة للمقررة السابقة، وكل جزء من أجزاء هذا البرهان هو في حد ذاته مقررة قائمة بذاتها ويمكن البرهنة عليها.

٤ - أما المقررة التالية فنقدم عليها البرهان بصورة غير مباشرة:

$$T4 \quad p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p).$$

البرهان

$$\begin{array}{ll} (1) & p \vee q \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}} \right\} \quad (a) \\ (2) & \neg q \\ (3) & \neg p \quad (a-i-p) \\ (4) & q \quad (od: 1, 3) \end{array}$$

كما هو ملاحظ يمكننا أن نبرهن أي صيغة لها الصورة:

$$\emptyset \vee \psi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \emptyset)$$

حيث \emptyset ، ψ هي أي صيغ في نظرية حساب القضايا. ونلاحظ أيضاً أن النسق بصيغة عامة ينظر إلى البرهان في مثل هذه الحالة على أنه يستند إلى الافتراضات ١، ٢ في البرهان السابق، وخطوات البرهان غير المباشر. وإذا طبقنا القاعدة OD على ١، ٣ فنحصل على ψ في الخطوة الرابعة، ومن ثم يصبح البرهان كما يلي:

$$\begin{array}{ll} (1) & \emptyset \vee \psi \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}} \right\} \quad (a) \\ (2) & \neg \psi \\ (3) & \neg \emptyset \quad (a-i-2) \\ (4) & \psi \quad (OD: 1; 3) \end{array}$$

وهذا يناقض الخطوة {٢، ٤}

على سبيل المثال: الصيغة:

$$(a) \quad (p = q) \vee p \wedge r \rightarrow [\neg(p \wedge r) \rightarrow (p = q)]$$

هذه الصيغة ترد إلى الصورة:

$$\emptyset \vee \psi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \emptyset)$$

حيث نلاحظ أن $(p = q) = \emptyset$ ، $(p \wedge r) = \psi$ وفي هذه الحالة يكون البرهان كما يلي:

- | | | |
|-----|--------------------------------|------------|
| (1) | $(p \equiv q) \vee p \wedge r$ | } {a} |
| (2) | $\neg(p \wedge r)$ | |
| (3) | $\neg(p \equiv q)$ | {a-i-p} |
| (4) | $p \wedge r$ | {OD: 1, 3} |

وهذا يناقض {٤ ، ٢}

من أجل هذا يضع نسق سلويسكي - بوركوفسكي المبرهنة الآتية:

مبرهنة || : أي صيغة في نظرية حساب القضايا لها الصورة:

$$\emptyset \vee \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \emptyset)$$

هي مقرة.

لكن النسق يضع لمصطلح مقرة استعارة رمز فريجة الخاص بعلامة التقرير التي كان فتيجنشتين قد اقترح إلغاؤها، فالصيغة (\emptyset مقرة) = في هذا النسق ($\vdash \emptyset$)، وبذا تكتب المبرهنة السابقة كما يلي:

$$\vdash \emptyset \vee \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \emptyset)$$

وذلك حتى يسهل التعامل مع مقررات النسق ومبرهنتاته.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن للمقرة T4 صورة أخرى يمكن البرهنة عليها:

$$T4b \quad \neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

البرهان

- | | | |
|-----|-----------------|------------|
| (1) | $\neg p \vee q$ | } {a} |
| (2) | p | |
| (3) | $\neg q$ | {a, i, p} |
| (4) | $\neg p$ | {OD: 1, 3} |

وهذا يناقض {٤ ، ٢}

نلاحظ أن الصورة السابقة للمقرره T4 يطلق عليها قانون الملاقة
بين الفصل والتضمن.

٥ - ويقدم النسق صورة لقاعدة حذف النفي المزدوج والتي يرمز لها بالرمز
ON حيث:

$$T5a \quad p \rightarrow \neg \neg p$$

البرهان

(1)	p	{a}
(2)	$\neg \neg \neg p$	{a-i-p}
(3)	$\neg p$	{ON: 2}

وهذا يناقض (١ ، ٣)

ويشتق من هذه القاعدة، قاعدة وصل النفي المزدوج JN، حيث:

$$T5b \quad \neg \neg p \equiv p \quad (JE: T5; T5a)$$

ونلاحظ على المقررة السابقة ما يلي :

١ - T5 ، T5a ، T5b يطلق عليها قوانين النفي المزدوج Laws of double
negation.

٢ - ونلاحظ كذلك بضفة خاصة أن القانون T5b يقرر أن النفي المزدوج
للقضية مكافئ للقضية ذاتها. وقد لاحظ الرواقيون هذا الأمر قديماً
وعرفوه جيداً.

٣ - كذلك يشتق من القاعدة JN (وصل النفي المزدوج) الصورة التالية:

$$\frac{\neg \emptyset \vee \varphi}{\emptyset} \quad \frac{\emptyset \vee \neg \varphi}{\varphi}$$

البرهان

(1)	$\omega \leftrightarrow \vee \neg \omega$	{a}
(2)	ω	
(3)	$\neg \neg \omega$	{JN: 2}
	\emptyset	{OD: 1; 3}

البرهان

(1)	$\neg \emptyset \vee \omega$	{a}
(2)	\emptyset	
(3)	$\neg \neg \emptyset$	{JN: 2}
	ω	{OD: 1; 3}

تجدر الملاحظة هنا إنه سبق للرواقية أن قدمت هذه الصور، وتوسعت في استخدامها في نطاق منطق القضايا الشرطية^(١).

٦- وقد أضاف النسق صورة قانون النقل The law of Transposition والتي تقررها المقررة:

$$T6 \quad p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(2)	$\neg q$	
(3)	p	{a-i-p}
(4)	q	{RD: 1; 3}

وهذا تناقض {٢، ٤}، وبالمثل يمكن البرهنة على الشق الثاني من المبرهنة.

ويجب أن نلاحظ أن قاعدة قانون النقل الأساسية كانت معروفة لدى أرسطو، وكذلك يعتبر مبدأ النقل من المبادئ الأساسية التي

(١) راجع ما سبق أن ذكرناه حول هذا الموضوع في: المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص ٢٠ - ص ٢٢.

استخدمها نسق برنكييا في صوره الأربع^(١) التي تحددها القضا:
(٢, ٠٣), (٢, ١٥), (٢, ١٦), (٢, ١٧).

٧- وهناك صورة مركبة لقانون النقل تقررها المقررة:

$$T \quad \neg \quad p \wedge q \rightarrow r \equiv p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$$

البرهان

- | | | | |
|-----|----------------------------|---|------------|
| (1) | $p \wedge q \rightarrow r$ | } | {a} |
| (2) | p | | |
| (3) | $\neg r$ | | |
| (4) | q | | {a-i-p} |
| (5) | $p \wedge q$ | | {JC: 2, 4} |
| (6) | r | | {RD: 1; 5} |

وهذا تناقض {٣, ٢}

٨- قانون التبسيط The law of Simplification وصورته تقررها المقررة

$$T \quad 10 \quad q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

البرهان

- | | | | |
|-----|----------|---|---------|
| (1) | q | } | {a} |
| (2) | p | | |
| (3) | $\neg q$ | | {a-i-p} |

وهذا تناقض {١, ٣}

٩- قانون الذاتية للضمين The Law of Identity for Implication وصورته:

$$T \quad 11 \quad p \rightarrow p$$

البرهان

- | | | |
|-----|----------|---------|
| (1) | p | {a} |
| (2) | $\neg p$ | {a-i-p} |

تناقض {١, ٢}

(١) المرجع السابق، ص ١٠٩.

١٠ - قانون الذاتية للتكافؤ The law of Identity for equivalence
وصورته :

$$T\ 11a \qquad p \equiv p$$

البرهان

- | | | |
|-----|-------------------|------------|
| (1) | $p \rightarrow p$ | {T 11} |
| (2) | $p \equiv p$ | {JE: 1; 1} |

١١ - ويبرهن النسق على علاقة التكافؤ بالتضمن كما يلي :

$$T\ 12 \qquad (p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$$

البرهان

- | | | |
|-----|-------------------|------------|
| (1) | $p \equiv q$ | {a} |
| (2) | $p \rightarrow q$ | {OE: 1} |
| (3) | $q \rightarrow p$ | {OE: 1} |
| | $q \equiv p$ | {JE: 3; 2} |

يلاحظ أن صور المقررات T 11a ، T 12 تقرر أن التكافؤ يتمتع بخاصية كونه انعكاسياً وتماثلياً في نفس الوقت.

١٢ - والصور الآتية تحدد أن قاعدة الإثبات بالإثبات صحيحة بالنسبة للتكافؤ :

RD	$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\emptyset}$	$\frac{\varphi \equiv \varphi}{\varphi}$
----	--	--

البرهان

- | | | | |
|-----|---------------------------------|---|------------|
| (1) | $\emptyset \equiv \varphi$ | } | {a} |
| (2) | φ | | |
| (3) | $\emptyset \rightarrow \varphi$ | | |
| | \emptyset | | {OE: 1} |
| | | | {RD: 3; 2} |

البرهان

(1)	$\emptyset \equiv \varphi$	{a}
(2)	\emptyset	
(3)	$\emptyset \rightarrow \varphi$	{OE: 1}
	φ	{RD: 3, 2}

١٣ - ويقدم النسق البرهان على المقررة التالية :

T 16a $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q \wedge r$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$q \wedge r$	{RD: 1.1}
(1.3)	q	{OC: 1.2}
(1.4)	r	{OC: 1.2}
(2)	$p \rightarrow q$	{1.1 \rightarrow 1.3}
(3)	$p \rightarrow r$	{1.1 \rightarrow 1.4}
	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	{JC: 2; 3}

٩٥ - ٩٤ - المقررة التالية :

T 17 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$

فيمكن البرهنة عليها على مرحلتين :

البرهان (أ) المرحلة الاولى

(1)	$p \rightarrow r$	{a}
(2)	$q \rightarrow r$	
(3)	$p \vee q$	
(4)	$\neg r$	{a, i, p}
(5)	$\neg p$	{toll.: 1, 4}
(6)	$\neg q$	{toll.: 2, 4}
(7)	q	{OD: 3, 5}

تناقض {٧ ، ٦}

البرهان (ب) المرحلة الثانية

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(1.3)	r	{RD: 1, 1.2}
(2)	$p \rightarrow r$	{1.1 \rightarrow 1.3}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD: 2.1}
(2.3)	■	{RD: 1, 2.2}
(3)	$q \rightarrow r$	{2.1 \rightarrow 2.3}
	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	{JC: 2, 3}

نلاحظ أن البرهان على المقررة التي لدينا هام ومفيد في حالات الجبر المألوف، فباستخدام المقررة، نجد أن الشرط في الصورتين التاليتين:

$$x \leq -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (١)$$

أو الصورة

$$x < -2 \vee x = -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (٢)$$

يكافئ

$$x < -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (١)'$$

$$x = -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (٢)'$$

هذا التضمن البسيط هو ما نطلق عليه قانون إضافة المقدمات

.law of addition of antecedents

١٥ - قاعدة الإخراج المركب التي تنص عليها المقررة:

T ■

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge q) \rightarrow r$$

هذه الصيغة تسمح لنا بأن نستنبط من مقدمتين لهما التالي نفسه والفصل بين المقدمتين، تسمح لنا باستنباط تالي التضمن. والمثال التالي يوضح لنا كيفية الاستدلال بالقاعدة السابقة.

$$\begin{array}{l} n = 1 \rightarrow (n + 1)^2 > n^2 \\ n > 1 \rightarrow (n + 1)^2 > n^2 \\ \hline n = 1 \vee n > 1 \\ (n + 1)^2 > n^2 \end{array}$$

١٦ - قانون سلب الفصل The law of negating a disjunction الذي نقرره المقررة:

$$T 19 \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(2)	$\neg p$	{1.1 \rightarrow Contr. (1, 1.2)}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD, 2.1}
(3)	$\neg q$	{2.1 \rightarrow Contr. (1, 2.2)}
	$\neg p \wedge \neg q$	{JC. 2, 3}

وباستخدام المقررة السابقة يصبح سلب الفصل مكافئاً لوصل عناصره، على سبيل المثال:

$$\neg(a > b \vee a = b) \quad (١) \text{ الصيغة}$$

$$\neg a > b \wedge \neg a = b \quad (٢) \text{ تكافؤ الصيغة}$$

كذلك يمكن أن نشق من المقررة السابقة قاعدة الفصل السالب على النحو التالي:

$$\begin{array}{l} ND \quad \frac{\neg(\emptyset \vee \varphi)}{\neg \emptyset} \quad \frac{\neg(\emptyset \vee \varphi)}{\neg \emptyset \wedge \neg \varphi} \\ \neg \blacksquare \end{array}$$

١٧ - قانون سلب الوصل The law of negating ■ Conjunction الذي
تقرره المقررة:

$$T\ 20 \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(2)	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	{a-i-p}
(3)	$\neg\neg p$	{ND. 2}
(4)	$\neg\neg q$	{ND. 2}
(5)	p	{ON. 3}
(6)	q	{ON. 4}
(7)	$p \wedge q$	{JC. 5, 6}

وهكذا يمكن الاستمرار في البرهان على الجزء الثاني.

لكننا نلاحظ أن المقررة T 19 وكذا المقررة T 20 متشابهتان من حيث التركيب. وقد سبق أن وجدناهما من قبل لدى المنطقي دي مورجان، وعرفهما مناطق القرن التاسع عشر باسم قوانين دي مورجان. والأكثر من هذا إنهما وجدنا لدى مناطق القرنين الرابع عشر والخامس عشر، خاصة لدى أوكام (ق ١٤٠).

١٨ - قانون عدم التناقض الذي تقرره المقررة:

$$T\ 22 \quad \neg(p \wedge \neg p)$$

البرهان

(1)	$p \wedge \neg p$	{a-i-p}
(2)	p	{OC. 1}
(3)	$\neg p$	

تناقض {٢، ٣}.

١٩ - قانون الثالث المرفوع وصورته تقررها المقررة:

$$T\ 23 \quad p \vee \neg p$$

البرهان

- | | | |
|-----|------------------------|---------|
| (1) | $\neg (p \vee \neg p)$ | {a-i-p} |
| (2) | $\neg p$ | {ND. 1} |
| (3) | $\neg \neg p$ | |

تناقض {٢، ٣}.

نلاحظ على المقررتين السابقتين (قانون عدم التناقض، قانون الثالث المرفوع) أن أرسطو أول من قدم صياغة لهما، وأنه أول من قدم الصياغة الميتامنتقية لهما، حيث يعني قانون عدم التناقض أن المتناقضتين لا تصدقان معاً. ويعني قانون الثالث المرفوع أن واحدة فقط من القضيتين المتناقضتين يجب أن تكون صادقة - لقد دافع أرسطو في كتاب الميتافيزيقا عن قانون الثالث المرفوع، وامتنح صحة القانون ومشروعيته بالإشارة إلى حوادث المستقبل غير المحددة، وقرر في هذا الصدد أن تبني هذا القانون بالنسبة لحوادث المستقبل سيفضي إلى النتيجة القائلة بأن كل شيء سوف يحدث هو ضروري. إلا أن لو كاشيفتش في الربع الأول من هذا القرن، خاصة فيما بين الأعوام ١٩١٨ - ١٩٢٠ حين أسس حساب المنطق الثلاثي القيم لم يستعن بقانون الثالث المرفوع، ولم يتبين أية ضرورة فيه.

٢٠ - قانون العامل الجديد The law of a New Factor وهو ما تقرره المقررة:

$$T 24 \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$$

هذا القانون يمكن البرهنة عليه بنفس الصيغة السابقة للبرهان، إلا أن أهميته تبدو أكثر في استخدامه كصورة من صور الاستدلال، مثل الصورة التالية:

$$\frac{a > 2 \rightarrow a > 0}{a > 2 \wedge a < 9 \rightarrow \blacksquare > \blacksquare \wedge a < 9}$$

أو

$$2 < a < 9 \rightarrow 0 < a < 9$$

٢١ - قانون العامل الجديد The law of a new element وتقرره المقررة:

$$T\ 26 \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(2)	$p \vee r$	
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	\blacksquare	{RD. 1, 1.1}
(1.3)	$q \vee r$	{JD. 1.2}
(2.1)	r	{ad. a}
(2.2)	$q \vee r$	{JD. 2.1}
	$q \vee r$	{1.1 \rightarrow 1.3, 2.1 \rightarrow 2.2, 2}

...

٢٢ - قانون إضافة التضمن الذي تقرره المقررة:

$$T\ 27 \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	q	{RD. 1, 1.1}
(1.3)	$q \vee s$	{JD. 1.2}
(2.1)	r	{ad. a}
(2.2)	s	{RD. 2, 2.1}
(2.3)	$q \vee s$	{JD. 2.2}
	$q \vee s$	{1.1 \rightarrow 1.3, 2.1 \rightarrow 2.3, 3}

وهناك المثال الآتي لتطبيق هذا القانون في حالات الجبر
المألوف:

$$\begin{array}{l} a > b \rightarrow a^2 > b^2 \\ a = b \rightarrow a^2 = b^2 \\ \hline a > b \vee a = b \rightarrow a^2 > b^2 \vee a^2 = b^2 \end{array}$$

or:

$$a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$$

٢٢ - وكذلك المقررة:

$$T\ 29 \quad \neg p \vee q \equiv (p \rightarrow q)$$

هذه المقررة سبق لنا أن قدمنا برهاناً على الشق الأول منها
 $\neg p \vee q$ في المقررة T 4 b، ولذا نقدم البرهان هنا على الشق الثاني.

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(1.1)	$\neg p$	{ad. a}
(1.2)	q	{RD: 1, 1.1}
(1.3)	$\neg p \vee q$	{JD: 1.2}
(2.1)	$\neg p$	{ad. a}
(2.2)	$\neg p \vee q$	{#D: 8, 1}
		{1.1 \rightarrow 1.3, 201 \rightarrow 2.2}

٢٤ - ويبرهن نسق سلوسكي - بوركوفسكي على قانون الأنساق المغلفة
للمصادرات، والذي قد يسمى أحياناً عكس التضمن، أو قانون هوبر
Hauber's law وهو ما تقرره

$$T\ 32 \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \neg (q \wedge s) \rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	} (a.)
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	
(4)	$\neg(q \wedge s)$	
(5)	$\neg q \vee \neg s$	{RD _E : T 20, 4}
(1.1)	q	(ad. a)
(1.2)	$\neg s$	{OD: 5, 1.1}
(1.3)	$\neg r$	{toll. : 2, 1.2}
(1.4)	p	{OD: 3, 1.3}
(6)	$q \rightarrow p$	{1.1 \rightarrow 1.4}
(2.1)	\equiv	(ad. a)
(2.2)	$\neg q$	{OD: 5, 2.1}
(2.3)	$\neg p$	{toll. : 1, 2.2}
(2.4)	r	{OD: 3, 2.3}
(7)	$s \rightarrow r$	{2.1 \rightarrow 2.4}
	$(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$	{JC: 6, 7}

ولكن يجب أن نلاحظ أن هذه المقررة في غاية الأهمية، إذ قد تشتق منها قواعد تطبيقية ذات فائدة كبيرة، فإذا كان عدد التضمنات التي لدينا n فإن قاعدة التضمنات العكسية في هذه الحالة تتخذ الصورة التالية :

$$\begin{array}{c}
 \varnothing_1 \rightarrow \varphi_1 \\
 \varnothing_2 \rightarrow \varphi_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 \varnothing_1 \vee \varnothing_2 \vee \dots \vee \varnothing_n \\
 \hline
 \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_j) \text{ for } 1 \leq i \neq j \leq n \\
 \hline
 \varphi_1 \rightarrow \varnothing_1 \\
 \varphi_2 \rightarrow \varnothing_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 \varphi_n \rightarrow \varnothing_n
 \end{array}$$

معنى هذا أنه إذا كان لدينا n من التضمنات المثبتة والفصل المتعلق بمقدمات تلك التضمنات، وإذا كان تاليها يستبعد تلقائياً الواحد بعد الآخر، إذن فإنه سيكون بإمكاننا أن نعكس كلاً من هذه التضمنات.

إن السؤال الآن هو: لقد قدم لنا نسق البرنكييا تعريفات متعددة للدوال القضائية، وهذه التعريفات وغيرها من الدوال الأخرى يمكن لها في ضوء القوانين المحددة التي وضعت للوصول والفصل والتضمن والسلب، أن تزودنا بقيم لصدق تلك الدوال عن طريق قوائم الصدق، فيكون بالتالي من المألوف لدينا أن نستخدم قائمة الصدق، ونبرهن بها على صحة التعريفات المعطاة، فتصبح قائمة الصدق أيضاً وسيلة أساسية - غير طريق البرهان المألوف - للبرهنة على صحة ضروب القياس مثلاً. ونحن نجد الآن في نسق سلويسكي - بوركوفسكي تقريراً لكثير من المقررات، مثل التي قدمنا طرفاً منها وغيرها، وما يبرهن عليها بصورة رياضية، بدون استخدام قوائم الصدق. ألا يمكن أن نجد في النسق الذي قدمناه إذن ما يشير إلى استخدام قوائم الصدق؟

الواقع أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي يفسح مجالاً هاماً لمناقشة هذه المسألة بصورة دقيقة، وأكثر تحديداً مما نألفه. إذ أن النسق يلجأ إلى ما يطلق عليه «منهج الصفر - واحد» Zero - One method لتحقيق الصيغ التي لدينا. وقد يبدو هذا المصطلح على درجة من الغموض؛ إلا أن المسألة ليست كذلك. نحن نعلم أن للقضية الواحدة قيمة صدق، وقيمة كذب. إذا كانت القضية صادقة True، أشرنا إليها في الأنساق المألوفة لنا مثل نسق برنكيي بالمختصر T، أما إذا كانت القضية كاذبة False فإننا نشير إليها بالمختصر F. لكن نسق سلويسكي - بوركوفسكي أراد أن يتخلص من هذين الرمزين: ويستخدم قيمتين عديتين هما الواحد، والصفر، ويرمز لهما على التوالي: 1، 0. وعلى هذا الأساس يقدم لنا النسق صياغة جديدة للدوال المختلفة على النحو التالي:

(١) السلب negation

\emptyset	$\neg \emptyset$
1	0
0	1

نلاحظ أن القضية $\neg \emptyset$ تكون كاذبة عندما تكون \emptyset صادقة، وكذلك تكون $\neg \emptyset$ صادقة حينما تكون \emptyset كاذبة. وهذا هو قانون السلب المألوف كما نجده في نسق برنكييا.

(٢) قائمة الوصل Conjunction

\emptyset	φ	$\emptyset \wedge \varphi$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

يقرر قانون الوصل في هذه الحالة، أن الوصل يصدق فقط إذا كان كلا من عنصريه صادقا، ويكون الوصل كاذبا إذا كذب أحد عنصريه على الأقل.

(٣) قائمة الفصل disjunction

\emptyset	φ	$\emptyset \vee \varphi$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

الفصل يصدق فقط فقط إذا صدق أحد عنصريه على الأقل، ويكذب الفصل إذا كذب عنصريه معا.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن النسق يقرر التمييز الدقيق بين الفصل غير الاستبعادي non-exclusive، والفصل الاستبعادي exclusive. أما

النوع الذي قدمناه توأ في القائمة السابقة فهو الفصل الاستيعادي وهو المؤلف لدينا. وأما النوع الثاني من الفصل، فهو ما توضحه القائمة:

\emptyset	ψ	$\emptyset \vee \psi$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

ومعنى هذا أن الفصل الاستيعادي يصدق فقط وفقط إذا صدق عنصر واحد من عناصره فقط، ويكذب إذا صدق عنصره معاً، أو إذا كذبا معاً. والسبب في اعتبار هذا الفصل استيعادي هو أن صدق عنصر واحد فيه فقط يستبعد صدق العنصر الآخر حين يكون الفصل صادقاً ككل.

ولقد جاء التمييز بين هذين النوعين بناءً على التمييز بين صورتين لغويتين هما:

(١) أن التعبير عن الفصل في اللغة الانجليزية الدارجة يتم إذا قلنا (p or q) أي [p أو q]. نلاحظ هنا الثابت (... or ...).

(٢) وكذلك الصيغة (either p or q)، حيث نلاحظ (either... or...) وهي أيضاً صيغة تعبر عن الفصل.

والمعروف أن نسق برنكييا وحد بين الصيغتين واستخدام الثابت \vee للتعبير عن الفصل إجمالاً. إلا أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي وجد ضرورة التمييز بينها على النحو التالي:

(') الصيغة (p or q) تكتب ($p \vee q$).

(') الصيغة (either p or q) تكتب ($p \vee q$).

(٤) قائمة التضمن Implication

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

يكون التضمن بمقتضى هذه القائمة كاذباً فقط فقط وإذا كان مقدمة صادقاً وتاليه كاذب. ويصدق التضمن في بقية الحالات الأخرى.

(٥) قائمة التكافؤ equivalence

يتم التوصل لقائمة صدق التكافؤ من قائمة صدق التضمن وقاعدتي وصل التكافؤ وحذف التكافؤ على النحو التالي:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \equiv \psi$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

نلاحظ أن التكافؤ يصدق في الحالة الأولى وكذلك الحالة الرابعة من قاعدة وصل التكافؤ التي تقرر أنه إذا كانت التضمنات البسيطة - العكسية صادقة فإن التكافؤ يكون صادقاً. أما في الحالة الثانية فإن التضمن العكسي $\psi \rightarrow \phi$ يكون كاذباً وهو ينتج بموجب الصيغة الثانية من قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\phi \equiv \psi}{\psi \rightarrow \phi}$$

وبذا يكون التكافؤ $\emptyset \equiv \varphi$ كاذباً أيضاً. أما في الحالة الثالثة، فإن التضمن البسيط $\varphi \rightarrow \emptyset$ يكون كاذباً وذلك بمقتضى قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\emptyset \rightarrow \varphi}$$

التي يتج منها أن التكافؤ $\emptyset \equiv \varphi$ كاذب أيضاً.

ومن ثم فإن القائمة السابقة تقرر القانون الآتي للتكافؤ: التكافؤ يكون صادقاً فقط و فقط إذا كان عنصراه لهما نفس قيمة الصديق، ويكذب التكافؤ فقط و فقط إذا كانت قيم صديق عنصراه مختلفة.

المراجع

أولاً: المراجع العربية:

- ١ - الدكتور محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٦٩.
- ٢ - برتراند رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة د. محمد مرسى أحمد ١٩٦٣.
- ٣ - يان لوكاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة د. عبد الحميد صبرة، منشأة المعارف، الاسكندرية، ١٩٦١.
- ٤ - الدكتور ماهر عبد القادر محمد نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية ١٩٧٩

ثانياً: الدوريات الأجنبية:

- 1 — Helmer, O., On The Theory of axiom- System, Analysis, Vol. 3, 1935.
- 2 — Lewis, C. I., Alternative Systems of Logic, Monist, 42, 1932.

ثالثاً: المراجع الأجنبية:

- 1 — Aristotle, Analytica Priora.
- 2 — Bell, E. T., The Queen of the Sciences, Batimore, Williams and Wilkins, 1931.
- 3 — Heath, T. L., The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge, England, The University Press, 1908.
- 4 — Henkin, L. and Suppes, P. and Tarski, A., The Asiomatic Method, Amsterdam, North - Holland pub, Co., 1959.
- 5 — Lewis, C. I., A Survey of Symbolic logic, Berkeley, 1918.
- 6 — ————— and Langford, C.H., Symbolic Logic, New York, 1932.
- 7 — Quine, W. V., Mathematical Logic, New York, 1940.
- 8 — —————, Elementary Logic, Boston, 1941.
- 9 — —————, From a Logical point of view, Harvard, New York, 1953.
- 10 — —————, Selected logic papers, New York, 1966.
- 11 — —————, Methods of logic, 3rd, ed. London, 1974.
- 12 — Reichenbach, H., «Bertrand Russell's Logic», ed. in The Philosophy of Bertrand Russell by P. A. Schipp, 1944.
- 13 — Struik D. J., A Concise History of Mathematics, 2 Vols, Dover pub, New York, 1948.
- 14 — Whitehead, A.N and Ressel, B., Principia Mathematica, 3 vol, Cambridge, Cambridge University Press, 1910 - 1913.

فهرست الموضوعات

٧	إهداء
٩	تصدير

القسم الأول

٨٤ - ١٣	فكرة التضمن في الأنساق المنطقية المعاصرة
١٥	الفصل الأول : لويس والتضمن الدقيق
٣٥	الفصل الثاني : لوكاشيفتش والمنطق متعدد القيم
٤٩	الفصل الثالث : هلبيرت والصورية البحتة
٥٩	الفصل الرابع : كوين وحركة تصحيح المفاهيم

القسم الثاني

١٢٨ - ٨٥	نظرية حساب القضايا في أنساق المنطق البولندي
	الفصل الخامس : يان لوكاشيفتش ومقدمات النسق الاستنباطي لنظرية
٨٧	حساب القضايا
	الفصل السادس : سلويسكي - بوركوفسكي والنسق المتكامل لنظرية
١٠١	حساب القضايا
١٢٩	المراجع

